

INTRODUÇÃO ÀS SÉRIES DE FOURIER

FABIANO J. SANTOS

JULHO DE 2004

Sumário

Lista de Figuras	iii
1 Funções Periódicas e Séries de Fourier	1
1.1 Funções Periódicas	1
1.1.1 Problemas Propostos	5
1.2 Relações de Ortogonalidade	6
1.2.1 Problemas Propostos	7
1.3 Séries de Fourier	7
1.3.1 Determinação dos Coeficientes de Fourier	8
1.3.2 Exemplos de Séries de Fourier	10
1.3.3 Problemas Propostos	14
1.4 O Teorema de Fourier*	16
1.5 Simetria ondulatória	18
1.5.1 Propriedades das funções pares e ímpares	19
1.5.2 Séries de Fourier de funções pares e ímpares	22
1.5.3 Problemas Propostos	25
1.6 Expansões periódicas	26
1.6.1 Expansões em meio período	28
1.6.2 Problemas Propostos	30
2 Séries de Fourier Complexa e Espectros Discretos	33
2.1 Série de Fourier Complexa	33
2.1.1 Interpretação Matemática da Série de Fourier	36
2.1.2 Interpretação Conceitual da Série de Fourier	36
2.1.3 Problemas Propostos	39
2.2 Números Complexos - Formas de Representação	41
2.2.1 Problemas Propostos	44
2.3 Os espectros de Amplitude e de Fase	45
2.3.1 Comentários sobre os Espectros de Amplitudes e de Fases	46

2.3.2 Problemas Propostos	51
Formulário	53
Referências Bibliográficas	54

Lista de Figuras

1.1	Uma função periódica.	1
1.2	Período e período fundamental.	2
1.3	Senóides: $sen(x)$ e $cos(x)$	3
1.4	Onda Quadrada - Período 2π	11
1.5	Onda Triangular - Período 2.	13
1.6	O conceito de função seccionalmente contínua.	17
1.7	Uma função par.	18
1.8	Uma função ímpar.	19
1.9	Função par e função ímpar no intervalo $[-L, L]$	21
1.10	Função periódica $f(x) = x^2$, $-1 \leq x < 1$, Período 2.	23
1.11	Onda Dente de Serra - Período 2π	25
1.12	Função sobre o intervalo $[0, a]$ e sua expansão periódica	27
1.13	A função $f(x) = x$ no intervalo $[0, \pi]$ e sua expansão periódica.	28
1.14	Expansões par e ímpar de uma função definida sobre o intervalo $[0, a]$	31
1.15	Expansão par da função $f(x) = x$ definida no intervalo $[0, \pi]$	32
2.1	Representação do número complexo $z = x + iy$ no plano complexo.	41
2.2	Alguns números complexos e suas respectivas fases (argumentos).	43
2.3	Alguns números complexos - forma cartesiana e forma fasorial.	44
2.4	Espectro de amplitudes da onda dente de serra da Figura 1.11.	47
2.5	Espectro de fases da onda dente de serra da Figura 1.11.	47
2.6	Espectro de amplitudes do Exemplo 2.5.	49
2.7	Espectro de fases do Exemplo 2.5.	50
2.8	Espectros do Problema 5.	51
2.9	Espectros do Problema 6.	52

Capítulo 1

Funções Periódicas e Séries de Fourier

1.1 Funções Periódicas

Uma função f é dita periódica se existe um número real positivo P , chamado período de f , tal que

$$f(x) = f(x + P), \quad (1.1)$$

para todo x no domínio de f . O gráfico de uma função periódica é obtido pela repetição de qualquer intervalo de comprimento P (Figura 1.1).

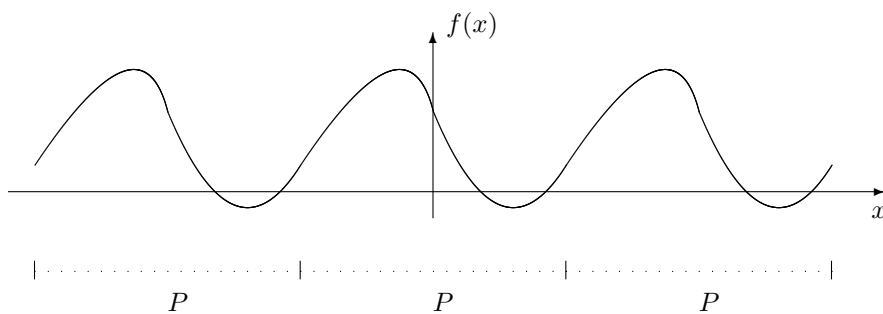


Figura 1.1: Uma função periódica.

Observações:

- O período P é o comprimento do intervalo em x necessário para a imagem da função se repetir.
- Segue da equação (1.1) que se f é periódica de período P então para qualquer n inteiro

positivo temos

$$f(x) = f(x + nP),$$

ou seja, qualquer múltiplo inteiro positivo nP de P também é um período de f . O menor valor de P que satisfaz a equação (1.1) é chamado **período fundamental** de f e será denotado por T . Qualquer outro período de f será um múltiplo inteiro do período fundamental. A Figura 1.2 ilustra tal conceito.

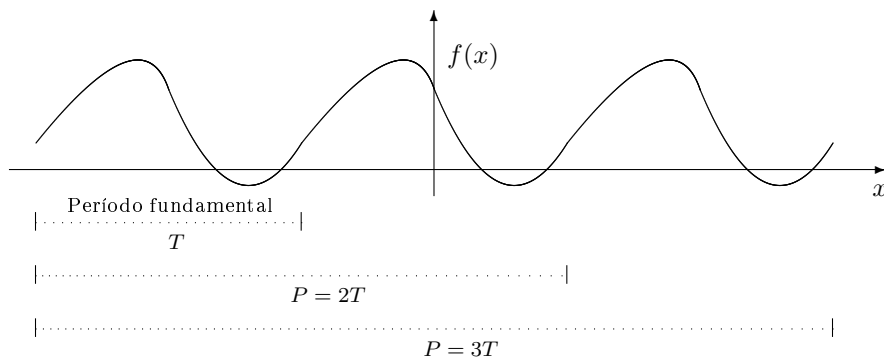


Figura 1.2: Período e período fundamental.

- a frequência F de uma função periódica é definida como o inverso de seu período

$$F = \frac{1}{P}$$

e nos dá o número de repetições (ciclos) em cada intervalo unitário em x . Se x é medido em segundos então a frequência F é o número de ciclos por segundo (Hertz).

- Um outro tipo de frequência, a qual utilizaremos no estudo das Séries de Fourier, é a frequência angular, denotada por ω , e definida como

$$\omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{P}.$$

- Se T é o período fundamental de f , então sua frequência (angular) fundamental, denotada por ω_0 , é dada por

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Exemplo 1.1 A função $f(x) = \text{sen}(x)$ é periódica com período fundamental $T = 2\pi$ e frequência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ (Figura 1.3)

Exemplo 1.2 A função $f(x) = \cos(x)$ é periódica com período fundamental $T = 2\pi$ e frequência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ (Figura 1.3)

Exemplo 1.3 A função constante $f(x) = c$ tem como período qualquer número real $P \neq 0$ e não possui período fundamental.

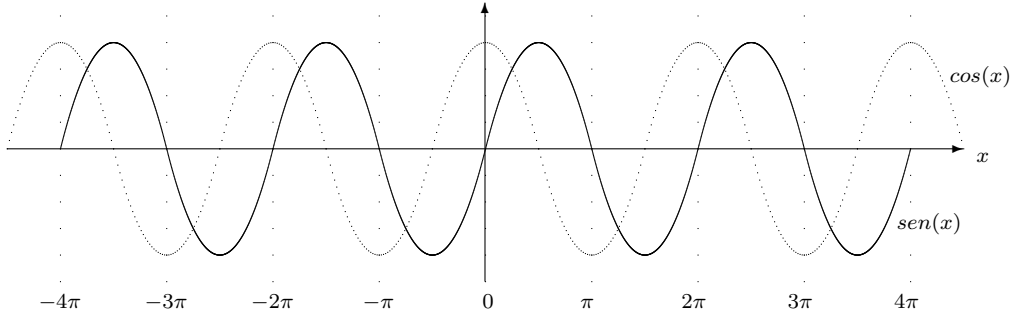


Figura 1.3: Senóides: $\text{sen}(x)$ e $\text{cos}(x)$.

As duas proposições a seguir nos dão duas propriedades importantes das funções periódicas.

Proposição 1.1 : *Seja f uma função periódica de período P , então:*

- (i) $f(ax)$, $a \neq 0$, é periódica de período $\frac{P}{a}$;
- (ii) $f\left(\frac{x}{b}\right)$, $b \neq 0$, é periódica de período bP .

Provas:

- (i) Suponha que P^* é o período de $f(ax)$, de modo que $f(ax) = f[a(x + P^*)] = f(ax + aP^*)$. Fazendo $u = ax$, obtemos $f(u) = f(u + aP^*)$. Logo pela hipótese de que f é periódica de período P , concluímos que $P = aP^*$ donde $P^* = \frac{P}{a}$.
- (ii) Suponha que P^* é o período de $f\left(\frac{x}{b}\right)$, de modo que $f\left(\frac{x}{b}\right) = f\left[\frac{1}{b}(x + P^*)\right] = f\left[\frac{x}{b} + \frac{P^*}{b}\right]$. Fazendo $u = \frac{x}{b}$, obtemos $f(u) = f\left(u + \frac{P^*}{b}\right)$. Logo pela hipótese de que f é periódica de período P , concluímos que $P = \frac{P^*}{b}$ donde $P^* = bP$.

Proposição 1.2 : *Sejam f_1 e f_2 duas funções periódicas de mesmo período P ; α_1 e α_2 duas constantes reais quaisquer. A função h definida por*

$$h(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x),$$

também é periódica de período P (isto é, a combinação linear de funções periódicas de mesmo período também é periódica, com mesmo período das funções que foram combinadas).

Aqui a prova é muito simples e pode ser obtida diretamente:

$$h(x + P) = \alpha_1 f_1(x + P) + \alpha_2 f_2(x + P) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = h(x).$$

Exemplo 1.4 Como as funções $\text{sen}(x)$ e $\text{cos}(x)$ possuem ambas período 2π , pela Proposição 1.1 observamos que:

(i) $\text{sen}(2x)$ e $\text{cos}(2x)$ possuem período $\frac{2\pi}{2} = \pi$;

(ii) $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ e $\text{cos}\left(\frac{x}{2}\right)$ possuem período $2 \times 2\pi = 4\pi$.

(iii) $\text{sen}(2\pi x)$ e $\text{cos}(2\pi x)$ possuem período $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$;

(iv) $\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{T}\right)$ e $\text{cos}\left(\frac{2\pi x}{T}\right)$ possuem período $\frac{2\pi}{2\pi} T = T$.

Além disto, $\forall n \in \mathbb{Z}$, as funções

$$\text{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) \text{ e } \text{cos}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

possuem período

$$\frac{2\pi}{2n\pi} T = \frac{T}{n}.$$

Mas como qualquer múltiplo inteiro do período também é período, concluímos que ambas também possuem período T . Finalmente, pela proposição 1.2, observamos que a função

$$h(x) = \alpha_1 \text{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + \alpha_2 \text{cos}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

também é periódica de período T .

Proposição 1.3 : Sejam f_1, f_2, \dots, f_n funções periódicas de período T . Então a função

$$h(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x),$$

dada pela combinação linear de f_1, f_2, \dots, f_n também é periódica de período T . A prova é análoga à da proposição 1.2 e pode ser obtida pelo princípio da indução.

Extrapolando a proposição 1.3, sejam $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ funções periódicas de mesmo período T , a série infinita dada por

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) + \dots,$$

define, para os valores de x nos quais converge, uma função periódica de período T . Assim podemos definir a função

$$h(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) + \dots,$$

tal que $h(x) = h(x + T)$. Esta última afirmação é de fundamental importância, uma vez que trabalharemos com séries infinitas trigonométricas da forma

$$\sum a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right). \quad (1.2)$$

Observe que cada termo desta série possui período T . Desta forma, para os valores de x nos quais a série converge ela define uma função periódica de período T .

1.1.1 Problemas Propostos

(1) Determine se cada uma das funções a seguir é ou não periódica. Caso seja determine seu período fundamental e sua frequência fundamental.

(a) $y = \cos(\pi x)$

(f) $y = \cos(nx)$

(b) $y = \operatorname{tg}(\pi x)$

(g) $y = \operatorname{sen}(n\pi x)$

(c) $y = x^2$

(h) $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{T}\right)$

(d) $y = \operatorname{sen}(5x)$

(i) $y = \cos(3x) + \operatorname{sen}(4x) + \cos(5x)$

(e) $y = \cos(3\pi x)$

(j) $y = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right) + \cos\left(\frac{x}{5}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{7}\right) + \cos\left(\frac{x}{9}\right)$

(2) Para cada função a seguir esboce seu gráfico para alguns valores de n . Observando este gráfico determine se a função é ou não periódica. Caso seja determine seu período fundamental e sua frequência fundamental.

(a) $y = \begin{cases} 0 & , \quad 2n - 1 \leq x < 2n \\ 1 & , \quad 2n \leq x < 2n + 1 \end{cases} , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(b) $y = \begin{cases} (-1)^n & , \quad 2n - 1 \leq x < 2n \\ 1 & , \quad 2n \leq x < 2n + 1 \end{cases} , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(3) Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções periódicas de mesmo período T . Mostre que

(a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ é periódica de período T (isto é, a soma de duas funções periódicas de mesmo período também é periódica);

(b) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ é periódica de período T (isto é, a diferença de duas funções periódicas de mesmo período também é periódica);

(c) $(fg)(x) = f(x)g(x)$ é periódica de período T (isto é, o produto de duas funções periódicas de mesmo período também é periódica);

(4) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período T e integrável em toda a reta. Mostre que

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx$$

(ou seja, independente do intervalo de integração o valor da integral será sempre o mesmo desde que o tamanho deste intervalo seja o próprio período da função. Geometricamente isto é óbvio. Por quê?)

1.2 Relações de Ortogonalidade

Antes de examinarmos com mais detalhes séries trigonométricas da forma (1.2) investigaremos algumas propriedades importantes das funções que a definem. Começemos lembrando, da trigonometria elementar, as fórmulas para o seno e cosseno da soma e da diferença:

$$\text{seno da soma: } \quad \text{sen}(\theta + \phi) = \text{sen}(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\text{sen}(\phi), \quad (1.3a)$$

$$\text{cosseno da soma: } \quad \cos(\theta + \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) - \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi), \quad (1.3b)$$

$$\text{seno da diferença: } \quad \text{sen}(\theta - \phi) = \text{sen}(\theta)\cos(\phi) - \cos(\theta)\text{sen}(\phi), \quad (1.3c)$$

$$\text{cosseno da diferença: } \quad \cos(\theta - \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) + \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi). \quad (1.3d)$$

A partir destas fórmulas obtemos três identidades que utilizaremos adiante no cálculo de algumas integrais:

$$\text{por (1.3b) + (1.3d) obtemos: } \quad 2\cos(\theta)\cos(\phi) = \cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi), \quad (1.4a)$$

$$\text{por (1.3d) - (1.3b) obtemos: } \quad 2\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi) = \cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi), \quad (1.4b)$$

$$\text{por (1.3a) - (1.3c) obtemos: } \quad 2\cos(\theta)\text{sen}(\phi) = \text{sen}(\theta + \phi) - \text{sen}(\theta - \phi). \quad (1.4c)$$

Os resultados do Teorema 1.4 dado a seguir também será importante para nosso trabalho futuro.

Teorema 1.4 (Relações de Ortogonalidade) : se $m, n \in \mathbb{Z}_+^*$ (inteiros positivos), então:

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } m \neq n \\ \frac{T}{2} & , \quad \text{se } m = n \end{cases} ; \quad (1.5a)$$

$$\int_0^T \text{sen}\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)\text{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } m \neq n \\ \frac{T}{2} & , \quad \text{se } m = n \end{cases} ; \quad (1.5b)$$

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)\text{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx = 0, \quad \forall m, n; \quad (1.5c)$$

As relações (1.5a), (1.5b) e (1.5c) são chamadas relações de ortogonalidade. Provaremos a equação (1.5a) e deixamos as provas das relações (1.5b) e (1.5c) como exercício para o leitor nos Problemas 1 (página 7) e 2 (página 7) respectivamente.

Prova de (1.5a)

- Caso $m \neq n$. Utilizando a identidade (1.4a) podemos escrever:

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^T \left[\cos\left(\frac{2m\pi x}{T} + \frac{2n\pi x}{T}\right) + \cos\left(\frac{2m\pi x}{T} - \frac{2n\pi x}{T}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \left[\cos\left(\frac{2(m+n)\pi x}{T}\right) + \cos\left(\frac{2(m-n)\pi x}{T}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{T}{2(m+n)\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2(m+n)\pi x}{T}\right) \right]_0^T + \frac{1}{2} \left[\frac{T}{2(m-n)\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2(m-n)\pi x}{T}\right) \right]_0^T \\ &= \frac{T}{4\pi(m+n)} \left[\operatorname{sen}\left(2(m+n)\pi\right) - \operatorname{sen}(0) \right] \\ &\quad + \frac{T}{4\pi(m-n)} \left[\operatorname{sen}\left(2(m-n)\pi\right) - \operatorname{sen}(0) \right] = 0;\end{aligned}$$

uma vez que $m, n \in \mathbb{Z}_+^*$, $m \neq n$, e o seno de múltiplos inteiros de π é zero.

- Caso $m = n$. Neste caso temos:

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right) dx &= \int_0^T \left[\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \left[1 + \cos\left(\frac{4n\pi x}{T}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{T}{4n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{4n\pi x}{T}\right) \right]_0^T \\ &= \frac{1}{2} \left[T + \frac{T}{4n\pi} \operatorname{sen}(4n\pi) - 0 - \frac{T}{4n\pi} \operatorname{sen}(0) \right] \\ &= \frac{1}{2} [T] = \frac{T}{2};\end{aligned}$$

uma vez que $n \in \mathbb{Z}_+^*$ e o seno de múltiplos inteiros de π é zero.

1.2.1 Problemas Propostos

- (1) Seguindo o mesmo raciocínio do texto, utilize a identidade (1.4b) para provar a relação de ortogonalidade (1.5b).
- (2) Seguindo o mesmo raciocínio do texto, utilize a identidade (1.4c) para provar a relação de ortogonalidade (1.5c).

1.3 Séries de Fourier

Voltemos agora às séries trigonométricas da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right), \quad (1.6)$$

na qual observamos que todas as infinitas parcelas são periódicas de período T . No conjunto de valores de x para os quais a série (1.6) converge ela define uma função periódica f de período T . Dizemos então que a série (1.6) é a **Série de Fourier**¹ para f e escrevemos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right), \quad (1.7)$$

onde os coeficientes a_0 , a_n e b_n ($n \in \mathbb{Z}_*^+$) são chamados Coeficientes de Fourier. Como a função f definida por (1.7) possui período fundamental T , sua frequência fundamental é $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Assim reescrevemos a série (1.7) na forma mais conveniente

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 x), \quad (1.8)$$

Raciocinando no sentido inverso, seja f uma função periódica de período fundamental T e frequência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Surgem duas questões:

- (i) como determinar os coeficientes de Fourier a_0 , a_n e b_n para que possamos representar f por uma série da forma (1.8)?
- (ii) quais as condições que devemos impor sobre f para que tal representação seja possível?

Abordaremos agora a primeira questão para a determinação dos coeficientes de Fourier. A segunda, por se tratar de um assunto mais sutil, será comentada mais adiante (seção 1.4) quando já estivermos familiarizados com as Séries de Fourier.

1.3.1 Determinação dos Coeficientes de Fourier

Dada uma função f periódica de período T nosso objetivo é determinar os Coeficientes de Fourier para esta função em particular. Em outras palavras, determinar os coeficientes de Fourier da representação em Série de Fourier para a dada função. Para tal fim lançaremos mão das relações de ortogonalidade anteriormente discutidas.

¹Jean Baptiste Joseph Fourier, Físico-Matemático francês (1768 – 1830). Fourier utilizou séries da forma (1.6) em seu famoso trabalho *Théorie Analytique de la Chaleur*, onde estudou os fenômenos de condução de calor.

- **Determinação de a_0 :** integramos² ambos os membros de (1.8) sobre o intervalo $[0, T]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(x)dx &= \int_0^T \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \text{sen}(n\omega_0 x) \right] dx \\
&= \int_0^T \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T a_n \cos(n\omega_0 x) dx + \int_0^T b_n \text{sen}(n\omega_0 x) dx \\
&= \left[\frac{a_0}{2} x \right]_0^T + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n\omega_0} \text{sen}(n\omega_0 x) \right]_0^T - \left[\frac{b_n}{n\omega_0} \cos(n\omega_0 x) \right]_0^T \\
&= \left[\frac{a_0}{2} T \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n\omega_0} \left[\text{sen}(n\omega_0 T) - \text{sen}(0) \right] - \frac{b_n}{n\omega_0} \left[\cos(n\omega_0 T) - \cos(0) \right] \\
&= \left[\frac{a_0}{2} T \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n\omega_0} \left[\text{sen}(2n\pi) - 0 \right] - \frac{b_n}{n\omega_0} \left[\cos(2n\pi) - 1 \right] = \frac{a_0}{2} T,
\end{aligned}$$

uma vez que $\text{sen}(2n\pi) = 0$ e $\cos(2n\pi) = 1 \forall n \in \mathbb{Z}$. Assim o coeficiente a_0 é dado por

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x)dx. \quad (1.9a)$$

- **Determinação de a_n :** multiplicamos ambos os membros de (1.8) por $\cos(m\omega_0 x)$ e integramos sobre o intervalo $[0, T]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(x)\cos(m\omega_0 x)dx &= \int_0^T \left[\frac{a_0}{2} \cos(m\omega_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) \cos(m\omega_0 x) + b_n \text{sen}(n\omega_0 x) \cos(m\omega_0 x) \right] dx \\
&= \int_0^T \frac{a_0}{2} \cos(m\omega_0 x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_0^T \cos(n\omega_0 x) \cos(m\omega_0 x) dx + \right. \\
&\quad \left. + b_n \int_0^T \text{sen}(n\omega_0 x) \cos(m\omega_0 x) dx. \right]
\end{aligned}$$

Pela equação (1.5c) a segunda integral do somatório é nula. Pela equação (1.5a) a segunda integral do somatório é nula para $m \neq n$ e vale $\frac{T}{2}$ para $m = n$. Assim temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(x)\cos(n\omega_0 x)dx &= \frac{a_0}{2n\omega_0} \left[\text{sen}(n\omega_0 x) \right]_0^T + a_n \frac{T}{2} \\
&= \frac{a_0}{2n\omega_0} \left[\text{sen}(n\omega_0 T) - \text{sen}(0) \right] + a_n \frac{T}{2} \\
&= \frac{a_0}{2n\omega_0} \left[\text{sen}(2n\pi) - \text{sen}(0) \right] + a_n \frac{T}{2} = a_n \frac{T}{2},
\end{aligned}$$

uma vez que $\text{sen}(2n\pi) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$. Assim o coeficiente a_n é dado por

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x)\cos(n\omega_0 x)dx. \quad (1.9b)$$

²Uma série de funções pode ser derivada e integrada termo a termo somente se ela for uniformemente convergente. Este é o caso das Séries de Fourier. Veja os Capítulos 1 e 2 da referência [3].

- **Determinação de b_n :** multiplicamos ambos os membros de (1.8) por $\text{sen}(m\omega_0x)$ e integramos sobre o intervalo $[0, T]$. Fica a cargo do leitor, Problema 7 da página 16, verificar que

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \text{sen}(n\omega_0x) dx. \quad (1.9c)$$

As equações (1.9a), (1.9b) e (1.9c) são chamadas **Fórmulas de Euler-Fourier** e se destinam ao cálculo dos Coeficientes de Fourier da série (1.8) para uma dada função f periódica de período T . Na dedução destas Fórmulas integramos sobre o intervalo $[0, T]$, mas como

$$f, \quad \cos(n\omega_0x) \quad \text{e} \quad \text{sen}(n\omega_0x),$$

onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, são todas periódicas de mesmo período T , os resultados dos Problemas 3 (página 5) e 4 (página 6) nos mostram que tal integração poderia se dar sobre qualquer intervalo de comprimento T . Assim, para o cálculo dos coeficientes a_0 , a_n e b_n podemos integrar sobre qualquer intervalo de comprimento T ; evidentemente escolhemos o intervalo mais conveniente.

1.3.2 Exemplos de Séries de Fourier

Resumindo nossos resultados até o momento: se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função periódica de período T , então f pode ser representada por uma Série de Fourier da forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0x) + b_n \text{sen}(n\omega_0x) \quad (1.10)$$

onde ω_0 é a frequência fundamental de f (e também da Série de Fourier), dada por $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Os coeficientes a_0 , a_n e b_n são dados pelas Fórmulas de Euler-Fourier³

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_T f(x) dx, \quad (1.11a)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T f(x) \cos(n\omega_0x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.11b)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T f(x) \text{sen}(n\omega_0x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.11c)$$

Exemplo 1.5 *Determine a representação em Série de Fourier da onda quadrada mostrada na Figura 1.4.*

³A simbologia $\int_T \dots dx$ significa integração sobre um período de f .

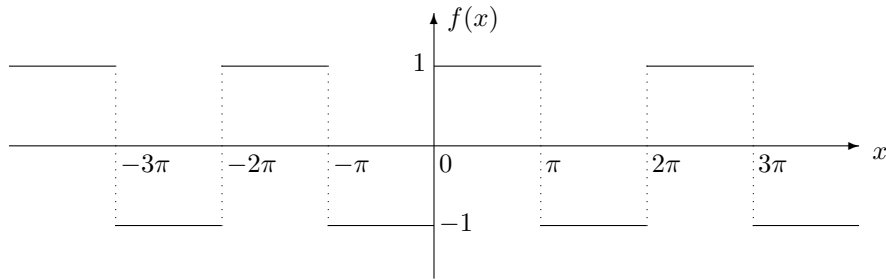


Figura 1.4: Onda Quadrada - Período 2π .

O período desta onda quadrada é $T = 2\pi$ e sua freqüência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$. Sua forma analítica pode ser dada por⁴

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad -\pi \leq x < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad , \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Passemos então aos cálculos dos coeficientes de Fourier.

- Cálculo de a_0 : usando a equação (1.11a) temos

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[-\int_{-\pi}^0 dx + \int_0^{\pi} dx \right] = -\frac{1}{\pi} \left[x \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[x \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi} [0 + \pi] + \frac{1}{\pi} [\pi - 0] = -1 + 1 = 0.$$

- Cálculo de a_n : usando a equação (1.11b), com $\omega_0 = 1$, temos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\int_{-\pi}^0 \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right] \\ &= -\frac{1}{n\pi} \left[\text{sen}(nx) \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{n\pi} \left[\text{sen}(nx) \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{n\pi} \left[\text{sen}(0) - \text{sen}(-n\pi) \right] + \frac{1}{n\pi} \left[\text{sen}(n\pi) - \text{sen}(0) \right] \\ &= -\frac{1}{n\pi} \left[0 + \text{sen}(n\pi) \right] + \frac{1}{n\pi} \left[\text{sen}(n\pi) - 0 \right] = 0, \end{aligned}$$

pois o seno de múltiplos inteiros de π é zero.

⁴Uma vez que a função é periódica, devemos expressá-la analiticamente em um intervalo do tamanho de seu período e a seguir indicar sua periodicidade. A escolha deste intervalo é arbitrária e em muitos casos a mais conveniente é o intervalo centrado na origem.

- Cálculo de b_n : usando a equação (1.11c), com $\omega_0 = 1$, temos

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}(nx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 \text{sen}(nx) dx + \int_0^{\pi} \text{sen}(nx) dx \right] \\
 &= \frac{1}{n\pi} \left[\cos(nx) \right]_{-\pi}^0 - \frac{1}{n\pi} \left[\cos(nx) \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{n\pi} \left[\cos(0) - \cos(-n\pi) \right] - \frac{1}{n\pi} \left[\cos(n\pi) - \cos(0) \right] \\
 &= \frac{1}{n\pi} \left[1 - \cos(n\pi) \right] - \frac{1}{n\pi} \left[\cos(n\pi) - 1 \right] = \frac{2}{n\pi} \left[1 - \cos(n\pi) \right].
 \end{aligned}$$

pois sendo o cosseno par, $\cos(n\pi) = \cos(-n\pi)$.

Substituindo $a_0 = 0$, $a_n = 0$ e $\omega_0 = 1$ na equação (1.10), a representação em Série de Fourier desta onda quadrada tem a forma

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(nx),$$

isto é, a Série só possui termos em senos⁵. Substituindo o valor encontrado para b_n podemos escrever

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[1 - \cos(n\pi) \right] \text{sen}(nx), \quad (1.12a)$$

que é uma forma bastante desajeitada. Utilizando a equação (1) (Formulário - página 53), podemos reescrever b_n como

$$b_n = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{4}{n\pi} & , \quad \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (1.12b)$$

isto é, temos apenas termos para valores ímpares de n . Assim, utilizando os valores de b_n dados pela equação (1.12b) a expansão da Série (1.12a) fica

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \text{sen}(x) + \frac{4}{3\pi} \text{sen}(3x) + \frac{4}{5\pi} \text{sen}(5x) + \frac{4}{7\pi} \text{sen}(7x) + \dots$$

ou, reescrevendo-a na forma de somatório (observe que temos apenas termos ímpares)

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \text{sen}[(2k+1)x]. \quad (1.12c)$$

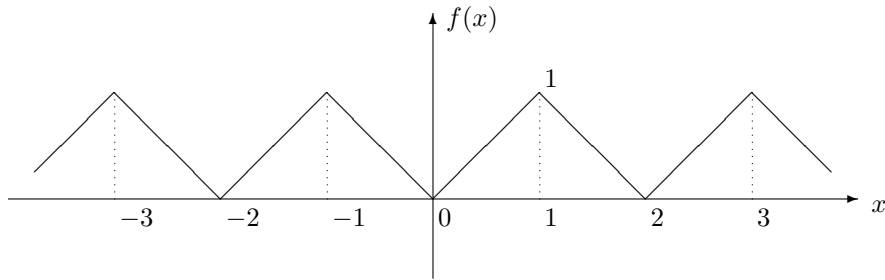


Figura 1.5: Onda Triangular - Período 2.

Exemplo 1.6 *Determine a representação em Série de Fourier da onda triangular mostrada na Figura 1.5.*

O período desta onda triangular é $T = 2$ e sua frequência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Sua forma analítica pode ser dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad -1 \leq x < 0 \\ x & , \quad 0 \leq x < 1 \end{cases} \quad , \quad f(x+2) = f(x).$$

Passemos então aos cálculos dos coeficientes de Fourier.

- *Cálculo de a_0 : usando a equação (1.11a) temos*

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\left[0 - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} - 0\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

- *Cálculo de a_n : usando a equação (1.11b), com $\omega_0 = \pi$, temos*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2} \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx \\ &= \int_{-1}^0 -x \cos(n\pi x) dx + \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx \end{aligned}$$

Pela equação (4) (Formulário - página 53), com $\omega_0 = \pi$, obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= -\left[\frac{x}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x)\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x)\right]_0^1 \\ &= -\left[\frac{1}{n^2\pi^2} \cos(0) + \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(-n\pi) - \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(-n\pi)\right] + \left[\frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi) + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi) - \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(0)\right] \\ &= -\left[\frac{1}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi)\right] + \left[\frac{1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi) - \frac{1}{n^2\pi^2}\right] = \frac{2}{n^2\pi^2} [\cos(n\pi) - 1] \end{aligned}$$

⁵Adiante, seção 1.5, veremos que isto não é uma mera coincidência.

- Cálculo de b_n : usando a equação (1.11c), com $\omega_0 = \pi$, temos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2} \int_{-1}^1 f(x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx \\ &= \int_{-1}^0 -x \operatorname{sen}(n\pi x) dx + \int_0^1 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx \end{aligned}$$

Pela equação (3) (Formulário - página 53), com $\omega_0 = \pi$, obtemos

$$\begin{aligned} b_n &= - \left[-\frac{x}{n\pi} \cos(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(n\pi x) \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x}{n\pi} \cos(n\pi x) + \frac{1}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(n\pi x) \right]_0^1 \\ &= - \left[\frac{1}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(0) - \frac{1}{n\pi} \cos(-n\pi) - \frac{1}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(-n\pi) \right] + \left[-\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{1}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{1}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}(0) \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) - \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) = 0 \end{aligned}$$

Substituindo $b_n = 0$ e $\omega_0 = \pi$ na equação (1.10), a representação em Série de Fourier desta onda triangular tem a forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x),$$

isto é, a Série possui o termo constante $\frac{a_0}{2}$ e termos em cossenos⁶. Substituindo o valores encontrados para a_0 e a_n podemos escrever

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2} \left[\cos(n\pi) - 1 \right] \cos(n\pi x). \quad (1.13a)$$

Utilizando a equação (1) (Formulário - página 53), podemos reescrever a_n como

$$a_n = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{4}{n^2\pi^2} & , \quad \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}, \quad (1.13b)$$

isto é, temos apenas termos para valores ímpares de n . Assim, utilizando os valores de a_n dados pela equação (1.13b) a expansão da Série (1.13a) fica

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos(\pi x) - \frac{4}{9\pi^2} \cos(3\pi x) - \frac{4}{25\pi^2} \cos(5\pi x) - \frac{4}{49\pi^2} \cos(7\pi x) + \dots$$

ou, reescrevendo-a na forma de somatório

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \operatorname{sen}[(2k-1)\pi x]. \quad (1.13c)$$

1.3.3 Problemas Propostos

(1) Refaça os cálculos do Exemplo 1.5 (página 10) integrando sobre o intervalo

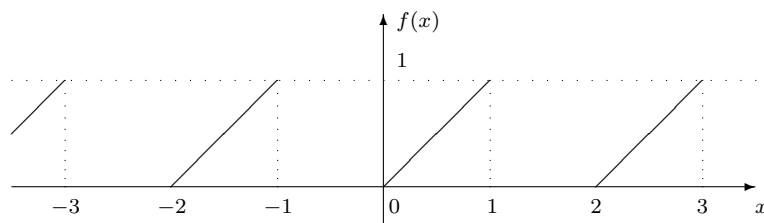
⁶Adiante, seção 1.5, veremos que isto não é uma mera coincidência.

- (a) $[0, 2\pi]$ (b) $[-2\pi, 0]$ (c) $[2\pi, 4\pi]$

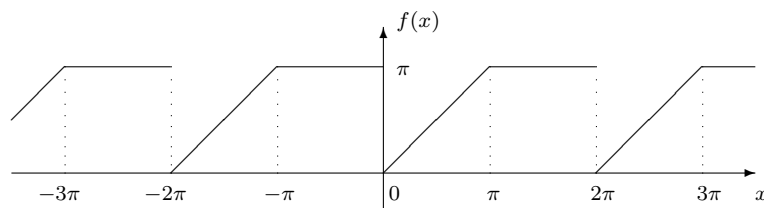
(2) Refaça os cálculos do Exemplo 1.6 (página 13) integrando sobre o intervalo

- (a) $[0, 2]$ (b) $[-2, 0]$ (c) $[2, 4]$

(3) Determine a forma analítica e a representação em Série de Fourier da função periódica.



(4) Determine a forma analítica e a representação em Série de Fourier da função periódica.



(5) Para cada função periódica a seguir esboce seu gráfico em um intervalo de três períodos e encontre sua representação em Série de Fourier.

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq x < 1 \end{cases} , \quad f(x) = f(x + 2).$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi \leq x < 0 \\ x & , \quad 0 \leq x < \pi \end{cases} , \quad f(x + 2\pi) = f(x).$

(c) $f(x) = \begin{cases} -3 - x & , \quad -3 \leq x < 0 \\ 3 - x & , \quad 0 \leq x < 3 \end{cases} , \quad f(x) = f(x + 6).$

(d) (retificador de meia onda) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi \leq x < 0 \\ \text{sen}(x) & , \quad 0 \leq x < \pi \end{cases} , \quad f(x) = f(x + 2\pi).$

(e) (retificador de onda completa) $f(x) = \text{sen}(x), \quad 0 \leq x < \pi, \quad f(x) = f(x + \pi).$

(6) Use a representação em Série de Fourier da onda triangular da Figura 1.5, dada pela equação (1.13c), para mostrar que

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \dots$$

(7) Verifique a validade da equação (1.9c).

1.4 O Teorema de Fourier*

Nesta seção discutiremos brevemente as funções representáveis por Séries de Fourier. Iniciamos definindo a seguinte notação para os limites laterais de uma função:

- limite lateral à esquerda:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a - 0);$$

- limite lateral à direita:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a + 0).$$

Também de fundamental importância é o conceito de função seccionalmente contínua (ou função contínua por partes).

Definição 1.5 (Função seccionalmente contínua) *Uma função f é seccionalmente contínua em um intervalo $[a, b]$ se pudermos subdividir o intervalo em um número finito de pontos*

$$a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b$$

de modo que f seja contínua em cada subintervalo aberto $t_{i-1} < x < t_i$, $i = 1, \dots, n$ (Figura 1.6(a)).

Em outras palavras, f é seccionalmente contínua no intervalo $[a, b]$ se ela é contínua em todo o intervalo, exceto em um número finito de pontos $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ deste intervalo. É importante observar que, pela continuidade em cada subintervalo, os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x) = f(a_i + 0) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x) = f(a_i - 0),$$

existem (são finitos).

Obviamente toda função contínua é seccionalmente contínua. Um exemplo simples de função que não é seccionalmente contínua é a função $f(x) = \frac{1}{x}$, uma vez que os limites laterais em $x = 0$ são infinitos (Figura 1.6(b)).

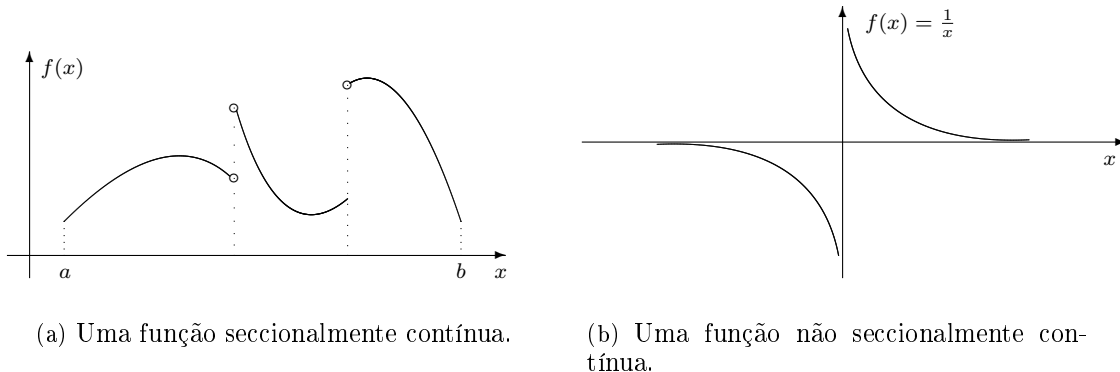


Figura 1.6: O conceito de função seccionalmente contínua.

Definição 1.6 (Função seccionalmente diferenciável) *Uma função f é dita seccionalmente diferenciável em um intervalo $[a, b]$ se f e sua derivada f' são seccionalmente contínuas em $[a, b]$.*

Teorema 1.7 (Teorema de Fourier) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e periódica de período T . Então a representação em Série de Fourier de f , dada pela equação (1.10), converge em cada x para $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$; isto é*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]. \quad (1.14)$$

A demonstração do Teorema de Fourier está além do escopo deste texto introdutório. Vamos simplesmente comentar sobre dois aspectos importantes do Teorema.

- Para ser representável por uma Série de Fourier uma função f deve ser periódica e seccionalmente diferenciável. A condição de ser seccionalmente diferenciável é uma condição suficiente, mas não necessária, para que f possa ser expandida em Série de Fourier. Em outras palavras, toda função periódica e seccionalmente contínua é representável por Série de Fourier, mas existem funções representáveis por Série de Fourier que não são seccionalmente contínuas. Isto implica que poderíamos enfraquecer as hipóteses do Teorema de modo a cobrir um número mais amplo de funções⁷.
- Em termos de convergência o Teorema afirma que a representação em Série de Fourier de uma função f converge para o ponto médio dos limites laterais de f para todo x .

⁷Uma discussão bastante detalhada sobre as Séries de Fourier, incluindo a demonstração do Teorema de Fourier, pode ser encontrada nos Capítulos 1, 2 e 3 da referência [3].

Obviamente isto implica que, nos pontos onde f é contínua a Série de Fourier converge para a própria imagem de f ; onde f é descontínua, por exemplo onde f apresenta um salto, a Série de Fourier converge para a média das imagens nos extremos do salto.

Exemplo 1.7 Considere a representação em Série de Fourier da onda quadrada, mostrada na Figura 1.4 (página 11), obtida no Exemplo 1.5 (página 10). Pelo Teorema de Fourier temos que:

- (a) em $x = \frac{\pi}{2}$ a função é contínua e tem imagem $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, logo sua representação em Série de Fourier, dada pela equação (1.12c), converge para 1;
- (b) em $x = \pi$ a função é descontínua (apresenta um salto), logo sua representação em Série de Fourier, dada pela equação (1.12c), converge para a média dos limites laterais em $x = \pi$, logo converge para $\frac{1}{2}$. Observe na Figura 1.4 que o mesmo comportamento de convergência ocorre em $x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$

1.5 Simetria ondulatória

Definição 1.8 (Função par) : uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita par se

$$f(x) = f(-x), \quad \forall x \text{ no domínio de } f.$$

Geometricamente, se f é par seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y (Figura 1.7). Observe que $f(a) = f(-a)$, $f(b) = f(-b)$ etc.

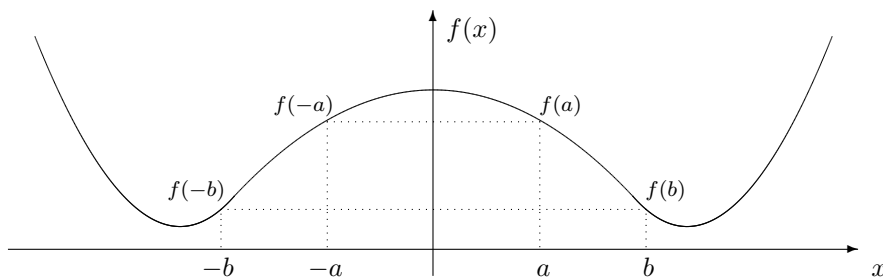


Figura 1.7: Uma função par.

Alguns exemplos de funções pares são $f(x) = c$ (função constante), $f(x) = |x|$ (função modular), $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$, $f(x) = x^n$ para n par. Um outro exemplo importante de função par é $f(x) = \cos(x)$ (Figura 1.3).

Definição 1.9 (Função ímpar) : uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ímpar se

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \text{ no domínio de } f.$$

Geometricamente, se f é ímpar seu gráfico é simétrico em relação à origem (Figura 1.8). Observe que $f(-a) = -f(a)$, $f(-b) = -f(b)$ etc.

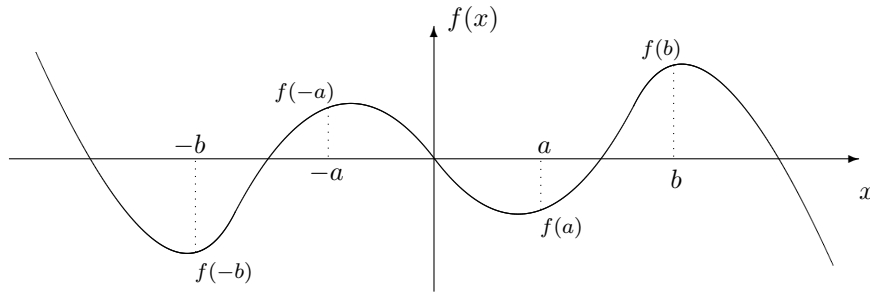


Figura 1.8: Uma função ímpar.

Alguns exemplos de funções ímpares são $f(x) = x$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^n$ para n ímpar. Um outro exemplo importante de função par é $f(x) = \text{sen}(x)$ (Figura 1.3).

Observações

- (i) A única função que é simultaneamente par e ímpar é a função identicamente nula $f(x) = 0$, ou seja, a função cuja imagem é zero para todo o domínio;
- (ii) se f é uma função ímpar que contenha 0 (zero) no domínio, então obrigatoriamente teremos $f(0) = 0$;
- (iii) a grande maioria das funções que ocorrem não são nem pares nem ímpares. Estamos particularmente interessados nas funções pares e ímpares pois suas representações em séries de Fourier aparecem na resolução de equações diferenciais parciais importantes da Física-Matemática e Engenharia.

1.5.1 Propriedades das funções pares e ímpares

A soma (diferença) e o produto (quociente) de funções pares e ímpares possuem propriedades importantes, as quais listaremos a seguir. Tais propriedades simplificarão bastante nosso trabalho na representação em Séries de Fourier de funções pares e ímpares.

- (S1) A soma (diferença) de duas funções pares é par;
- (S2) a soma (diferença) de duas funções ímpares é ímpar;
- (S3) a soma (diferença) de uma função par e uma função ímpar não é nem par nem ímpar.

(P1) O produto (quociente) de duas funções pares é par.

(P2) O produto (quociente) de duas funções ímpares é par.

(P3) O produto (quociente) de uma função par e uma função ímpar é ímpar

As provas são bastante simples. Provaremos P2 e deixaremos as demais como exercício para o leitor no Problema 4 (página 26).

Prova de P4

Sejam $I_1, I_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções ímpares, isto é $I_1(-x) = -I_1(x)$ e $I_2(-x) = -I_2(x)$.

- Defina o produto $P(x) = I_1(x)I_2(x)$; logo temos:

$$P(-x) = I_1(-x)I_2(-x) = [-I_1(x)][-I_2(x)] = I_1(x)I_2(x) = P(x),$$

isto é, com a hipótese que I_1 e I_2 são ímpares, mostramos que o produto $P(x) = I_1(x)I_2(x)$ satisfaz $P(x) = P(-x)$, logo este produto é par.

- Defina o quociente $Q(x) = \frac{I_1(x)}{I_2(x)}$; logo temos:

$$Q(-x) = \frac{I_1(-x)}{I_2(-x)} = \frac{-I_1(x)}{-I_2(x)} = \frac{I_1(x)}{I_2(x)} = Q(x),$$

isto é, com a hipótese que I_1 e I_2 são ímpares, mostramos que o quociente $Q(x) = \frac{I_1(x)}{I_2(x)}$ satisfaz $Q(x) = Q(-x)$, logo este quociente é par.

Proposição 1.10 : Se f é uma função par integrável no intervalo $[-L, L]$ então

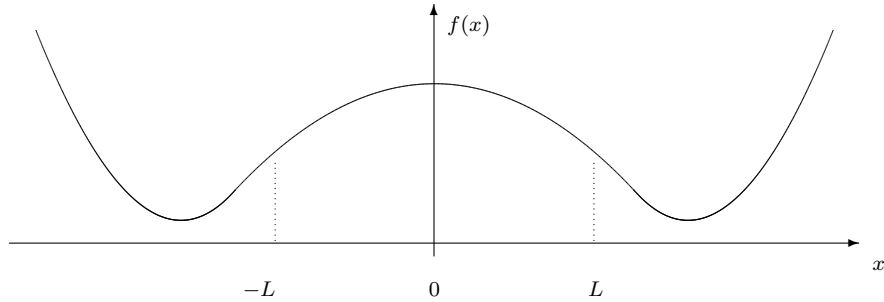
$$\int_{-L}^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx$$

Geometricamente a proposição é óbvia, uma vez que sendo f par a área sob a curva no intervalo $[-L, 0]$ é igual à área sob a curva no intervalo $[0, L]$, Figura 1.9(a). Formalmente temos:

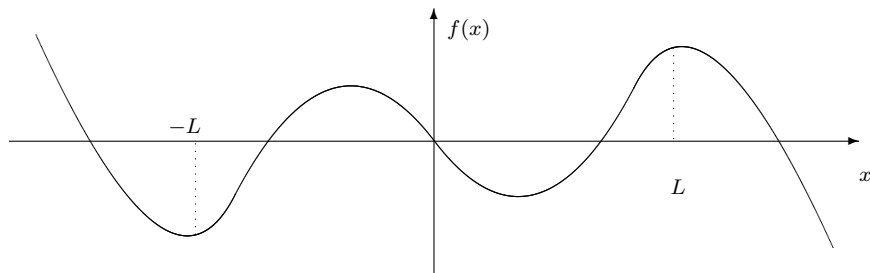
$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx;$$

fazendo $x = -t$ na primeira integral do membro direito, temos $dx = -dt$; logo

$$\int_{-L}^L f(x)dx = - \int_L^0 f(-t)dt + \int_0^L f(x)dx = \int_0^L f(t)dt + \int_0^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx.$$



(a) Função par: áreas nos intervalos $[-L, 0]$ e $[0, L]$ iguais com mesmo sinal.



(b) Função ímpar: áreas nos intervalos $[-L, 0]$ e $[0, L]$ iguais com sinais contrários.

Figura 1.9: Função par e função ímpar no intervalo $[-L, L]$.

Proposição 1.11 : Se f é uma função ímpar integrável no intervalo $[-L, L]$ então

$$\int_{-L}^L f(x)dx = 0$$

Geometricamente a proposição é óbvia, uma vez que sendo f ímpar a área sob a curva no intervalo $[-L, 0]$ é igual à área sob a curva no intervalo $[0, L]$, porém como tais áreas têm sinais contrários a soma se cancela, Figura 1.9(b). Formalmente temos:

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx;$$

fazendo $x = -t$ na primeira integral do membro direito, temos $dx = -dt$; logo

$$\int_{-L}^L f(x)dx = - \int_L^0 f(-t)dt + \int_0^L f(x)dx = - \int_0^L f(t)dt + \int_0^L f(x)dx = 0.$$

1.5.2 Séries de Fourier de funções pares e ímpares

Proposição 1.12 (Série de Fourier de uma função par) *a Série de Fourier de uma função f , par, periódica de período T e frequência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, é uma série de cossenos, isto é*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x). \quad (1.15a)$$

Para a verificação desta proposição suponhamos que f é par e periódica de período $T = 2L$, onde L é o meio período.

- Calculando a_0 , equação (1.11a), obtemos:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx = \frac{4}{T} \int_0^L f(x) dx, \quad (1.15b)$$

uma vez que o integrando é par e pela Proposição 1.10 podemos substituir a integral no intervalo $[-L, L]$ por duas vezes a integral no intervalo $[0, L]$.

- Calculando a_n , equação (1.11b), obtemos:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\omega_0 x) dx = \frac{4}{T} \int_0^L f(x) \cos(n\omega_0 x) dx, \quad (1.15c)$$

uma vez que pela a propriedade P1 o integrando $f(x) \cos(n\omega_0 x)$ é par e pela Proposição 1.10 podemos substituir a integral no intervalo $[-L, L]$ por duas vezes a integral no intervalo $[0, L]$.

- Calculando b_n , equação (1.11c), obtemos:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(n\omega_0 x) dx = \frac{2}{T} \int_{-L}^L f(x) \sin(n\omega_0 x) dx = 0,$$

uma vez que pela a propriedade P3 o integrando $f(x) \sin(n\omega_0 x)$ é ímpar e pela Proposição 1.11 a integral se anula.

Logo, se f é par e periódica de período T , sua expansão em Série de Fourier é da forma (1.15a) (veja a representação em Série de Fourier da onda triangular do Exemplo 1.6 na página 13).

Exemplo 1.8 *Determine a expansão em Série de Fourier da função periódica*

$$f(x) = x^2, \quad -1 \leq x < 1, \quad f(x) = f(x + 2),$$

mostrada na Figura 1.10.

O período da onda é $T = 2$ e sua frequência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Neste caso, como a onda apresenta simetria par temos $b_n = 0$ e devemos determinar apenas a_0 e a_n .

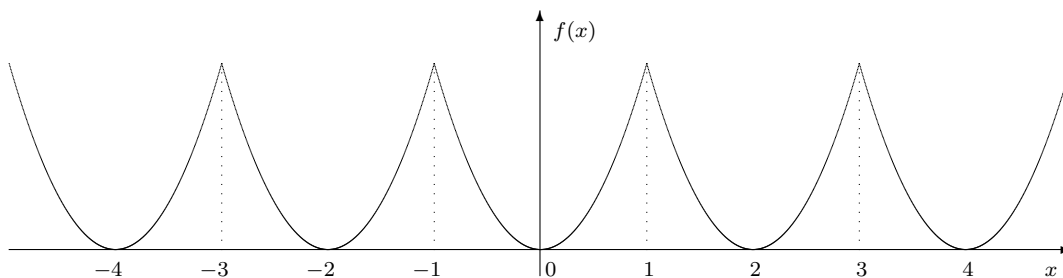


Figura 1.10: Função periódica $f(x) = x^2$, $-1 \leq x < 1$, Período 2.

- Cálculo de a_0 : substituindo $T = 2$, $L = 1$ e $\omega_0 = \pi$ na equação (1.15b) obtemos

$$a_0 = \frac{4}{2} \int_0^1 x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

- Cálculo de a_n : substituindo $T = 2$, $L = 1$ e $\omega_0 = \pi$ na equação (1.15c) obtemos

$$a_n = \frac{4}{2} \int_0^1 x^2 \cos(n\pi x) dx.$$

Usando a equação (7) (Formulário - página 53), com $\omega_0 = \pi$, obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{2} \left[\frac{x^2}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi x) + \frac{2x}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) - \frac{2}{n^3\pi^3} \operatorname{sen}(n\pi x) \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{2} \left[\frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(n\pi) + \frac{2}{n^2\pi^2} \cos(n\pi) - \frac{2}{n^3\pi^3} \operatorname{sen}(n\pi) - 0 - 0 - \frac{2}{n^3\pi^3} \operatorname{sen}(0) \right] \\ &= \frac{4}{n^2\pi^2} \cos(n\pi) \end{aligned}$$

Assim, pela equação (1.15a) com $\omega_0 = \pi$, a representação em Série de Fourier da função fica

$$f(x) \sim \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2} \cos(n\pi x), \quad (1.16)$$

ou, usando a equação (1) (Formulário - página 53),

$$f(x) \sim \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x).$$

Proposição 1.13 (Série de Fourier de uma função ímpar) *a Série de Fourier de uma função f , ímpar, periódica de período T e frequência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, é uma série de senos, isto é*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\omega_0 x). \quad (1.17a)$$

Para a verificação desta proposição suponhamos que f é ímpar e periódica de período $T = 2L$, onde L é o meio período.

- Calculando a_0 , equação (1.11a), obtemos:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx = \frac{2}{T} \int_{-L}^L f(x) dx = 0,$$

uma vez que o integrando é ímpar e pela Proposição 1.11 a integral se anula.

- Calculando a_n , equação (1.11b), obtemos:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\omega_0 x) dx = \frac{2}{T} \int_{-L}^L f(x) \cos(n\omega_0 x) dx = 0,$$

uma vez que pela a propriedade P3 o integrando $f(x) \cos(n\omega_0 x)$ é ímpar e pela Proposição 1.11 a integral se anula.

- Calculando b_n , equação (1.11c), obtemos:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \text{sen}(n\omega_0 x) dx = \frac{4}{T} \int_0^L f(x) \text{sen}(n\omega_0 x) dx, \quad (1.17b)$$

uma vez que pela a propriedade P2 o integrando $f(x) \text{sen}(n\omega_0 x)$ é par e pela Proposição 1.10 podemos substituir a integral no intervalo $[-L, L]$ por duas vezes a integral no intervalo $[0, L]$.

Logo, se f é ímpar e periódica de período T , sua expansão em Série de Fourier é da forma (1.17a) (veja o a representação em Série de Fourier da onda quadrada do Exemplo 1.5 na página 10.)

Exemplo 1.9 *Determine a representação em Série de Fourier da onda dente de serra mostrada na Figura 1.11.*

O período da onda é $T = 2\pi$ e sua frequência fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$. Sua forma analítica pode ser dada por

$$f(x) = x, \text{ se } -\pi \leq x < \pi \text{ e } f(x) = f(x + 2\pi).$$

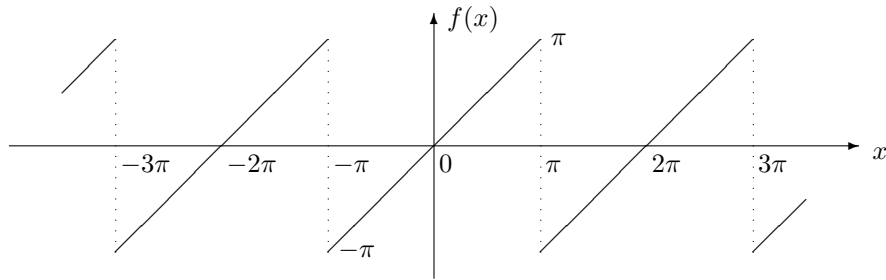


Figura 1.11: Onda Dente de Serra - Período 2π .

Neste caso, como a onda apresenta simetria ímpar temos $a_0 = a_n = 0$ e devemos determinar apenas b_n . Substituindo $T = 2\pi$, $L = \pi$ e $\omega_0 = 1$ na equação (1.17b) obtemos

$$b_n = \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi x \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \operatorname{sen}(nx) dx,$$

e pela equação (3) (Formulário - página 53)

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(nx) \right]_0^\pi = -\frac{2}{n} \cos(n\pi).$$

Usando a equação (1) (Formulário - página 53) b_n pode ser reescrito como

$$b_n = -2 \frac{(-1)^n}{n}.$$

Assim, pela equação (1.17a) com $\omega_0 = 1$, a representação em Série de Fourier da onda dente de serra fica

$$f(x) \sim -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen}(nx), \quad (1.18)$$

ou na forma expandida

$$f(x) \sim \frac{2}{1} \operatorname{sen}(x) - \frac{2}{2} \operatorname{sen}(2x) + \frac{2}{3} \operatorname{sen}(3x) - \frac{2}{4} \operatorname{sen}(4x) + \frac{2}{5} \operatorname{sen}(5x) - \dots$$

1.5.3 Problemas Propostos

- (1) Determine se as seguintes funções são pares, ímpares ou nenhum dos dois (explique).

- (a) $y = x^3$ (c) $y = x^3 - 2x + 1$ (e) $y = \sec(x)$
 (b) $y = x^3 - 2x$ (d) $y = \operatorname{tg}(2x)$ (f) $y = |x|^3$

(2) Usando as propriedades das funções pares e ímpares calcule as integrais dadas.

- (a) $\int_{-1}^1 x dx$ (d) $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) dx$
 (b) $\int_{-1}^1 x^4 dx$ (e) $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \operatorname{sen}(nx) dx$
 (c) $\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx$ (f) $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx$

(3) Nos problemas a seguir determine a representação em Série de Fourier pedida para a função dada. Esquematize o gráfico desta representação utilizando 3 períodos.

- (a) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x < \pi \\ 0 & , \quad \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$, série de cossenos, $T = 4\pi$.
 (b) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x < \pi \\ 0 & , \quad \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$, série de senos, $T = 4\pi$.
 (c) $f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$, série de cossenos, $T = 4$.
 (d) $f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$, série de senos, $T = 4$.
 (e) $f(x) = x$, $0 \leq x < \pi$, série de cossenos, $T = 2\pi$. (Compare com o Exemplo 1.6 na página 13.)
 (f) $f(x) = x$, $0 \leq x < \pi$, série de senos, $T = 2\pi$. (Compare com o Exemplo 1.9 na página 24.)

(4) Prove as propriedades S1, S2, S3, P1 e P3 da soma (diferença) e produto (quociente) de funções pares e ímpares da página 19 do texto. (Sugestão: veja a prova de P2 na página 20).

1.6 Expansões periódicas

Muitas vezes surge a necessidade de representarmos por uma Série de Fourier uma função

$$f : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R},$$

isto é, uma função definida apenas no intervalo $[0, a]$, Figura 1.12(a). Obviamente tal representação não é possível, uma vez que f não é periódica.

Para contornar tal situação expandimos f periodicamente $\forall x \in \mathbb{R}$, Figura 1.12(b), e a seguir determinamos a Série de Fourier desta expansão (observe que a expansão tem período a). A Série de Fourier assim obtida, restrita ao intervalo $[0, a]$, é a representação procurada para f^8 .

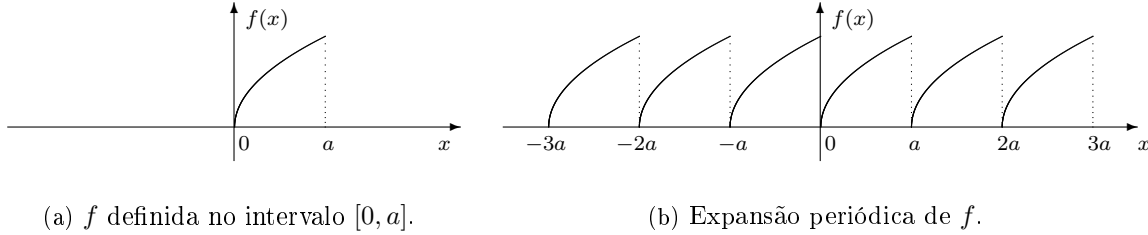


Figura 1.12: Função sobre o intervalo $[0, a]$ e sua expansão periódica

Exemplo 1.10 *Determine a representação em Série de Fourier da função*

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x < \pi,$$

mostrada na Figura 1.13(a).

Neste caso vamos determinar a Série de Fourier da expansão periódica de f , mostrada na Figura 1.13(b), para a qual $T = \pi$ e $\omega_0 = 2$.

- Cálculo de a_0 : usando a equação (1.11a) temos

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\pi = \left[\frac{\pi^2}{2} - 0 \right] = \pi.$$

- Cálculo de a_n : usando a equação (1.11b), com $\omega_0 = 2$, temos

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(2nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x}{2n} \sin(2nx) + \frac{1}{4n^2} \cos(2nx) \right]_0^\pi = 0$$

- Cálculo de b_n : usando a equação (1.11c), com $\omega_0 = 2$, temos

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(2nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x}{2n} \cos(2nx) + \frac{1}{4n^2} \sin(2nx) \right]_0^\pi = -\frac{1}{n} \cos(2n\pi) = -\frac{1}{n}$$

⁸É evidente que a Série de Fourier da expansão periódica define uma outra função que não é f , acontece que no intervalo de interesse $[0, a]$ essa função é idêntica a f .

Assim, pela equação (1.10) com $\omega_0 = 2$, a representação em Série de Fourier da expansão periódica de f fica

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}(2nx),$$

ou na forma expandida

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{1}{1} \text{sen}(2x) - \frac{1}{2} \text{sen}(4x) - \frac{1}{3} \text{sen}(6x) - \frac{1}{4} \text{sen}(8x) - \frac{1}{5} \text{sen}(10x) - \dots$$

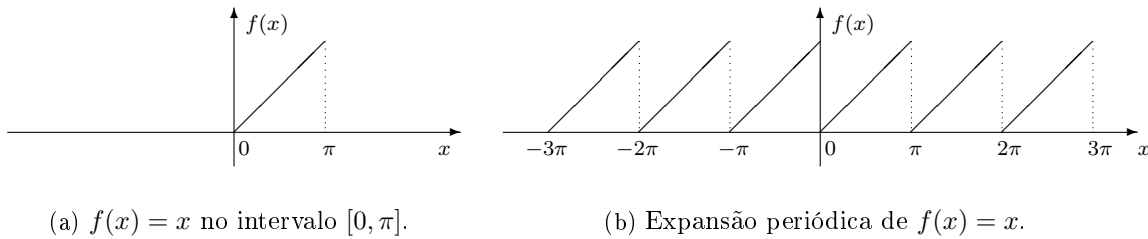


Figura 1.13: A função $f(x) = x$ no intervalo $[0, \pi]$ e sua expansão periódica.

1.6.1 Expansões em meio período

Nas seções 1.5 e 1.5.2 estudamos as funções periódicas com simetrias par e ímpar e suas representações em Séries de Fourier. Vimos que:

- se f é par e periódica, então pode ser expandida em uma Série de Fourier de cossenos;
- se f é ímpar e periódica, então pode ser expandida em uma Série de Fourier de senos;

Vimos também que nestes casos as Fórmulas de Euler-Fourier que calculam os coeficientes da Série de Fourier, equações (1.15b) e (1.15c) na série de cossenos, equação (1.17b) na série de senos, empregam a integração em apenas meio período.

Estes fatos nos sugere outras abordagens, conhecidas como expansões em meio período, para a representação em Série de Fourier de uma função f definida apenas no intervalo $[0, a]$:

- **expansão par:** a partir de f definimos uma nova função com simetria par sobre o intervalo $[-a, a]$. Estendemos esta nova função periodicamente $\forall x \in \mathbb{R}$, Figura 1.14(b), e a seguir determinamos a Série de Fourier desta expansão periódica (observe que a expansão tem período $2a$). Uma vez que tal expansão periódica tem simetria par sua Série de Fourier será uma série de cossenos da forma (1.15a).

- **expansão ímpar:** a partir de f definimos uma nova função com simetria ímpar sobre o intervalo $[-a, a]$. Estendemos esta nova função periodicamente $\forall x \in \mathbb{R}$, Figura 1.14(c), e a seguir determinamos a Série de Fourier desta expansão periódica (observe que a expansão tem período $2a$). Uma vez que tal expansão periódica tem simetria ímpar sua Série de Fourier será uma série de senos da forma (1.17a).

Nas expansões em meio período (par ou ímpar) só necessitamos conhecer a definição da função em meio período, ou seja, no intervalo $[0, a]$, uma vez que o cálculos dos coeficientes de uma série de cossenos ou de uma série de senos empregam integração em apenas meio período, conforme observamos nas equações (1.15b) e (1.15c) para a série de cossenos e (1.17b) para a série de senos.

Exemplo 1.11 *Determine a expansão par em meio período da função*

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x < \pi,$$

mostrada na Figura 1.13(a).

A expansão par de f é mostrada na Figura 1.15. Observamos que para esta expansão temos $T = 2\pi$ e $\omega_0 = 1$.

- *Cálculo de a_0 : usando a equação (1.15b) temos*

$$a_0 = \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\pi = \left[\frac{\pi^2}{2} - 0 \right] = \pi.$$

- *Cálculo de a_n : usando a equação (1.15c), com $\omega_0 = 1$, temos*

$$a_n = \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin(nx) + \frac{1}{n^2} \cos(nx) \right]_0^\pi = \frac{2}{n^2\pi} \left[\cos(n\pi) - 1 \right]$$

Utilizando a equação (1) (Formulário - página 53), podemos reescrever a_n como

$$a_n = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & , \quad \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} ,$$

Assim, pela equação (1.15a) com $\omega_0 = 1$, a representação em Série de Fourier da expansão par de f fica

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi(2k-1)^2} \cos[(2k-1)x],$$

ou na forma expandida

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos(x) - \frac{4}{9\pi} \cos(3x) - \frac{4}{25\pi} \cos(5x) - \frac{4}{49\pi} \cos(7x) - \frac{4}{81\pi} \cos(9x) - \dots$$

Exemplo 1.12 *Determine a expansão ímpar em meio período da função*

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x < \pi,$$

mostrada na Figura 1.13(a).

A expansão ímpar de f é exatamente a onda dente de serra mostrada na Figura 1.11 da página 25. Logo sua Série de Fourier é dada pela equação (1.18) da página 25.

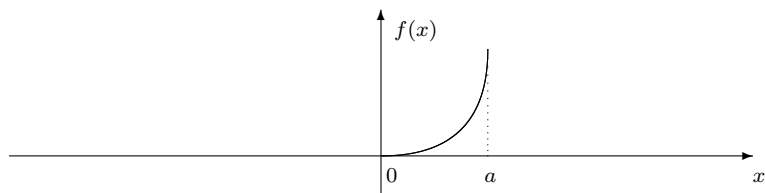
1.6.2 Problemas Propostos

(1) Dada a função $f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x < \pi \\ \pi & , \quad \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$,

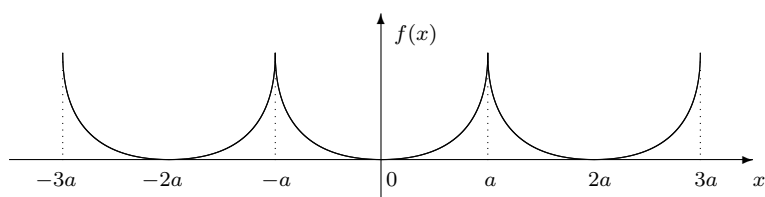
- (a) esboce o gráfico de sua expansão periódica (período $T = 2\pi$) no intervalo $[-6\pi, 6\pi]$ e encontre sua representação em Série de Fourier;
- (b) esboce o gráfico de sua expansão periódica par (período $T = 4\pi$) no intervalo $[-6\pi, 6\pi]$ e encontre sua representação em Série de Fourier;
- (c) esboce o gráfico de sua expansão periódica ímpar (período $T = 4\pi$) no intervalo $[-6\pi, 6\pi]$ e encontre sua representação em Série de Fourier.

(2) Dada a função $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & , \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$,

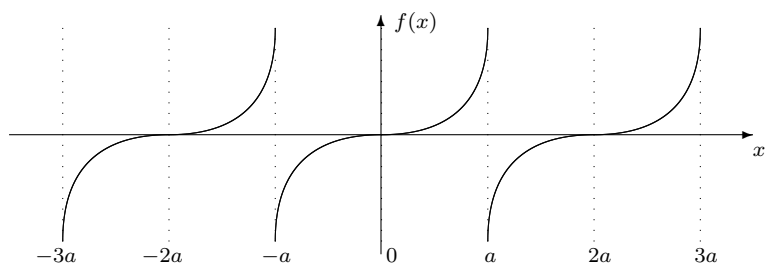
- (a) esboce o gráfico de sua expansão periódica (período $T = 2$) no intervalo $[-6, 6]$ e encontre sua representação em Série de Fourier;
- (b) esboce o gráfico de sua expansão periódica par (período $T = 4$) no intervalo $[-6, 6]$ e encontre sua representação em Série de Fourier;
- (c) esboce o gráfico de sua expansão periódica ímpar (período $T = 4$) no intervalo $[-6, 6]$ e encontre sua representação em Série de Fourier.



(a) Função f definida apenas no intervalo $[0, a]$.



(b) Expansão par de f .



(c) Expansão ímpar de f .

Figura 1.14: Expansões par e ímpar de uma função definida sobre o intervalo $[0, a]$

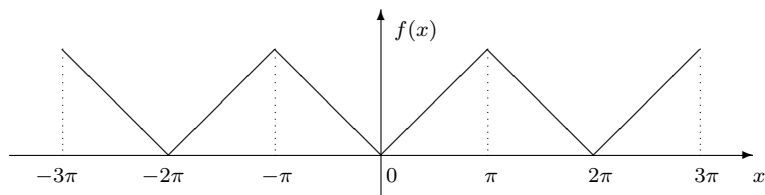


Figura 1.15: Expansão par da função $f(x) = x$ definida no intervalo $[0, \pi]$.

Capítulo 2

Séries de Fourier Complexa e Espectros Discretos

2.1 Série de Fourier Complexa

Conforme vimos no Teorema de Fourier (página 17), se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente diferenciável e periódica de período T , então f pode ser representada por uma Série de Fourier da forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 x) \quad (2.1)$$

onde ω_0 é a frequência fundamental de f (e também da Série de Fourier), dada por

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Os coeficientes a_0 , a_n e b_n são dados pelas Fórmulas de Euler-Fourier

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_T f(x) dx, \quad (2.2a)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T f(x) \cos(n\omega_0 x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2b)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T f(x) \operatorname{sen}(n\omega_0 x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2c)$$

Nosso objetivo é obter uma representação em Série de Fourier em termos de funções exponenciais complexas da forma

$$e^{in\omega_0 x}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

ao invés dos termos trigonométricos da equação (2.1). Pela definição da função exponencial complexa

$$e^{x+iy} = e^x[\cos(y) + i\text{sen}(x)],$$

temos que

$$e^{in\omega_0 x} = \cos(n\omega_0 x) + i\text{sen}(n\omega_0 x), \quad (2.3a)$$

$$e^{-in\omega_0 x} = \cos(n\omega_0 x) - i\text{sen}(n\omega_0 x), \quad (2.3b)$$

uma vez que o cosseno é par, $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$, e o seno é ímpar, $-\text{sen}(\theta) = \text{sen}(-\theta)$. Assim, por (2.3a)+ (2.3b), obtemos

$$\cos(n\omega_0 x) = \frac{1}{2} \left(e^{in\omega_0 x} + e^{-in\omega_0 x} \right); \quad (2.4a)$$

e por (2.3a)– (2.3b), lembrando que $\frac{1}{i} = -i$, obtemos

$$\text{sen}(n\omega_0 x) = -\frac{1}{2} i \left(e^{in\omega_0 x} - e^{-in\omega_0 x} \right). \quad (2.4b)$$

Substituindo as equações (2.4a) e (2.4b) no somatório da equação (2.1) obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \text{sen}(n\omega_0 x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} a_n \left(e^{in\omega_0 x} + e^{-in\omega_0 x} \right) - \frac{1}{2} i b_n \left(e^{in\omega_0 x} - e^{-in\omega_0 x} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{in\omega_0 x} + \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-in\omega_0 x}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Agora definimos o coeficiente c_n como

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - ib_n), \quad (2.6)$$

e observamos que

$$\bar{c}_n = \frac{1}{2} (a_n + ib_n),$$

de modo que a equação (2.5) pode ser reescrita como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \text{sen}(n\omega_0 x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x} + \bar{c}_n e^{-in\omega_0 x}. \quad (2.7)$$

Pelas equações (2.2b) e (2.2c) observamos que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_T f(x) \cos(n\omega_0 x) dx = \frac{2}{T} \int_T f(x) \cos(-n\omega_0 x) dx = a_{-n}, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_T f(x) \text{sen}(n\omega_0 x) dx = -\frac{2}{T} \int_T f(x) \text{sen}(-n\omega_0 x) dx = -b_{-n}. \end{aligned}$$

Assim

$$\bar{c}_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2}(a_{-n} - ib_{-n}) = c_{-n},$$

e o somatório em (2.7) pode ser reescrito como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x} + c_{-n} e^{-in\omega_0 x},$$

ou simplesmente (fazendo n variar em todos os inteiros, exceto zero)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n e^{in\omega_0 x}. \quad (2.8)$$

Pelas equações (2.2b) e (2.2c) o coeficiente c_n , definido pela equação (2.6), fica

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{T} \int_T f(x) \cos(n\omega_0 x) dx - i \frac{2}{T} \int_T f(x) \sin(n\omega_0 x) dx \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_T f(x) [\cos(n\omega_0 x) - i \sin(n\omega_0 x)] dx \\ &= \frac{1}{T} \int_T f(x) e^{-in\omega_0 x}, \quad n \in \mathbb{Z}^* \end{aligned} \quad (2.9)$$

Definimos também $c_0 = \frac{a_0}{2}$, isto é,

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \frac{2}{T} \int_T f(x) dx = \frac{1}{T} \int_T f(x) dx. \quad (2.10)$$

Usando as equações (2.8) e (2.10) a expansão de f em Série de Fourier Trigonométrica, dada pela equação (2.1), pode ser reescrita como

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n e^{in\omega_0 x}$$

ou simplesmente (fazendo n variar em todos os inteiros, inclusive zero, e lembrando que $e^0 = 1$)

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega_0 x}, \quad (2.11)$$

chamada de expansão em Série de Fourier Complexa (ou Exponencial) de f . Fazendo n variar em todos os inteiros, inclusive zero, e observando que (2.10) é um caso particular de (2.9) para $n = 0$, os coeficientes da Série (2.11) são dados pela equação (2.9), isto é

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(x) e^{-in\omega_0 x}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.12)$$

2.1.1 Interpretação Matemática da Série de Fourier

Do ponto de vista matemático, as Séries de Fourier nos mostram que o conjunto

$$\left\{ e^{in\omega_0 x}, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

forma uma base ortonormal, de dimensão infinita, para o espaço das funções seccionalmente diferenciáveis e periódicas de período T . A equação (2.11) é exatamente a representação de uma função deste espaço nesta base. Os coeficientes c_n de cada função base são dados pelos produtos internos da equação (2.12). Demonstrações detalhadas destes breves comentários podem ser encontradas em diversas referências na literatura; os leitores interessados encontrarão um excelente material nos Capítulos 1 e 2 da referência [3].

2.1.2 Interpretação Conceitual da Série de Fourier

Qualquer função seccionalmente diferenciável e periódica de período T pode ser representada por uma soma (infinita) de funções da forma

$$e^{in\omega_0 x}, \omega_0 = 2\pi/T, n \in \mathbb{Z}.$$

Neste contexto denominamos as funções $e^{in\omega_0 x}$ de harmônicos, ou seja, os constituintes fundamentais de uma onda qualquer. Dizemos que $e^{i\omega_0 x}$ é o primeiro harmônico (ou harmônico fundamental, pois possui a mesma frequência de f); $e^{i2\omega_0 x}$ é o segundo harmônico (sua frequência é o dobro da frequência de f); $e^{i3\omega_0 x}$ é o terceiro harmônico (sua frequência é o triplo da frequência de f); e assim por diante. A equação (2.11), chamada *equação de síntese*, nos diz que f pode ser sintetizada pela soma de infinitos harmônicos cujas frequências são múltiplos inteiros de sua frequência fundamental. Nesta soma, a contribuição de harmônico é ponderada pelo respectivo coeficiente c_n , dado pela equação (2.12), chamada *equação de análise*. Conforme veremos adiante, o coeficiente c_n nos informa a amplitude e o ângulo de fase de cada um dos harmônicos constituintes de f .

Exemplo 2.1 *Determine a representação em Série de Fourier Complexa da onda quadrada do Exemplo 1.5 (página 10) mostrada na Figura 1.4 (página 11).*

Conforme vimos no Exemplo 1.5 esta onda quadrada tem período $T = 2\pi$, frequência fundamental $\omega_0 = 1$ e forma analítica

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad -\pi \leq x < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad , \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Substituindo $\omega_0 = 1$ na equação (2.12), c_n fica

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -e^{-inx} dx + \int_0^{\pi} e^{-inx} dx \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{in} e^{-inx} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{in} e^{-inx} \Big|_0^{\pi} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{in} (1 - e^{in\pi}) - \frac{1}{in} (e^{-in\pi} - 1) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2}{in} - \frac{1}{in} (e^{in\pi} + e^{-in\pi}) \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2}{in} - \frac{2}{in} \cos(n\pi) \right] \\
 &= \frac{1}{in\pi} [1 - \cos(n\pi)] = \frac{i}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1]. \tag{2.13a}
 \end{aligned}$$

Observe que c_0 não pode ser calculado pela equação (2.13a), pois resultaria em divisão por zero. Logo devemos calculá-lo separadamente:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -dx + \int_0^{\pi} dx \right] = \frac{1}{2\pi} [-\pi + \pi] = 0 \tag{2.13b}$$

Utilizando a equação (1) (Formulário - página 53), podemos reescrever a equação (2.13a) como

$$c_n = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n \text{ é par} \\ -\frac{2i}{n\pi} & , \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases} . \tag{2.13c}$$

Assim, substituindo $\omega_0 = 1$ na equação (2.11), a representação em Série de Fourier Complexa da onda quadrada da Figura 1.4 é dada por

$$f(x) \sim -\frac{2i}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2k+1} e^{i(2k+1)x} .$$

ou, na forma expandida

$$f(x) \sim \dots - \frac{2i}{5\pi} e^{-5ix} - \frac{2i}{3\pi} e^{-3ix} - \frac{2i}{\pi} e^{-ix} - \frac{2i}{\pi} e^{ix} - \frac{2i}{3\pi} e^{3ix} - \frac{2i}{\pi} e^{5ix} - \dots$$

Exemplo 2.2 A partir dos coeficientes complexos c_n do Exemplo 2.1 determine os coeficientes trigonométricos a_0 , a_n e b_n .

Como $c_0 = \frac{a_0}{2}$, equação (2.10), pelo resultado da equação (2.13b) temos $a_0 = 0$. Para determinarmos a_n e b_n observamos, pela equação (2.6), que

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad (2.14a)$$

$$\bar{c}_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n); \quad (2.14b)$$

donde

$$\text{fazendo (2.14a)+(2.14b):} \quad a_n = c_n + \bar{c}_n, \quad (2.14c)$$

$$\text{fazendo (2.14b)-(2.14a):} \quad ib_n = c_n - \bar{c}_n. \quad (2.14d)$$

Usando a equação (2.14c) e o resultado da equação (2.13a), obtemos

$$a_n = \frac{i}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1] + \frac{(-i)}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1] = 0.$$

Usando a equação (2.14d) e o resultado da equação (2.13a), obtemos

$$ib_n = \frac{i}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1] - \frac{(-i)}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1] = \frac{2i}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1],$$

logo

$$b_n = \frac{2}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1],$$

e usando a equação (1) (Formulário - página 53), obtemos

$$b_n = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{4}{n\pi} & , \quad \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} .$$

Observe que os resultados $a_0 = a_n = 0$ já eram esperados, uma vez que a onda quadrada em questão possui simetria ímpar. Compare este resultado com o Exemplo 1.5 na página 10.

Exemplo 2.3 Determine a representação em Série de Fourier Complexa da onda triangular do Exemplo 1.6 (página 13) mostrada na Figura 1.5 (página 13).

Conforme vimos no Exemplo 1.6 esta onda triangular tem período $T = 2$, frequência fundamental $\omega_0 = \pi$ e forma analítica

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad -1 \leq x < 0 \\ x & , \quad 0 \leq x < 1 \end{cases} , \quad f(x+2) = f(x).$$

Substituindo $\omega_0 = \pi$ na equação (2.12), c_n fica

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) e^{-in\pi x} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^0 -x e^{-in\pi x} dx + \int_0^1 x e^{-in\pi x} dx \right]. \end{aligned} \quad (2.15a)$$

Pela equação (5) (Formulário - página 53) com $\omega_0 = \pi$, a equação (2.15a) torna-se

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{ix}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2} \right) e^{-in\pi x} \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{ix}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2} \right) e^{-in\pi x} \Big|_0^1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{n^2\pi^2} + \left(-\frac{i}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2} \right) e^{in\pi} + \left(\frac{i}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2} \right) e^{-in\pi} - \frac{1}{n^2\pi^2} \right], \end{aligned}$$

e como, para $n \in \mathbb{Z}$, $e^{in\pi} = \cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = e^{-in\pi}$, obtemos

$$c_n = \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{n^2\pi^2} + \frac{2}{n^2\pi^2} \cos(n\pi) \right] = \frac{1}{n^2\pi^2} [\cos(n\pi) - 1]. \quad (2.15b)$$

Observe que c_0 não pode ser calculado pela equação (2.15b), pois resultaria em divisão por zero. Logo devemos calculá-lo separadamente:

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx \right] = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Usando a equação (1), a equação (2.15b) torna-se

$$c_n = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{2}{n^2\pi^2} & , \quad \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Assim, substituindo $\omega_0 = \pi$ na equação (2.11), a representação em Série de Fourier Complexa da onda triangular da Figura 1.5 é dada por

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{i(2k+1)\pi x}. \quad (2.15c)$$

ou, na forma expandida

$$f(x) \sim \dots - \frac{2}{25\pi^2} e^{-5i\pi x} - \frac{2}{9\pi^2} e^{-3i\pi x} - \frac{2}{\pi^2} e^{-i\pi x} + \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} e^{i\pi x} - \frac{2}{9\pi^2} e^{3i\pi x} - \frac{2}{\pi^2} e^{5i\pi x} - \dots$$

2.1.3 Problemas Propostos

(1) Refaça os cálculos do Exemplo 2.1 (página 36) integrando sobre o intervalo

- (a) $[0, 2\pi]$ (b) $[-2\pi, 0]$ (c) $[2\pi, 4\pi]$

(2) Refaça os cálculos do Exemplo 2.3 (página 38) integrando sobre o intervalo

- (a) $[0, 2]$ (b) $[-2, 0]$ (c) $[2, 4]$

(3) A partir dos coeficientes complexos c_n do Exemplo 2.3 determine os coeficientes trigonométricos a_0 , a_n e b_n . Compare o resultado com o Exemplo 1.6 na página 13.

(4) Para cada função periódica a seguir esboce seu gráfico em um intervalo de três períodos e encontre sua representação em Série de Fourier Complexa.

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & , -1 \leq x < 0 \\ 1 & , 0 \leq x < 1 \end{cases}$, $f(x) = f(x + 2)$.

(b) $f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi \leq x < 0 \\ x & , 0 \leq x < \pi \end{cases}$, $f(x + 2\pi) = f(x)$.

(c) $f(x) = \begin{cases} -3 - x & , -3 \leq x < 0 \\ 3 - x & , 0 \leq x < 3 \end{cases}$, $f(x) = f(x + 6)$.

(d) (retificador de meia onda) $f(x) = \begin{cases} 0 & , -\pi \leq x < 0 \\ \text{sen}(x) & , 0 \leq x < \pi \end{cases}$, $f(x) = f(x + 2\pi)$.

(e) (retificador de onda completa) $f(x) = \text{sen}(x)$, $0 \leq x < \pi$, $f(x) = f(x + \pi)$.

(5) Obtenha a representação em Série de Fourier Complexa da função periódica do Problema 3 da página 15 a partir de sua representação em Série de Fourier Trigonométrica.

(6) Obtenha a representação em Série de Fourier Complexa da função periódica do Problema 4 da página 15 a partir de sua representação em Série de Fourier Trigonométrica.

(7) Obtenha a representação em Série de Fourier Complexa da função periódica do Exemplo 1.8 da página 22 a partir de sua representação em Série de Fourier Trigonométrica.

(8) Analise as equações (2.6) e (2.10) para se convencer que:

- (a) Se f possui simetria par então os coeficientes c_n de sua expansão em Série de Fourier Complexa são números reais puros;
- (b) Se f possui simetria ímpar então os coeficientes c_n de sua expansão em Série de Fourier Complexa são números imaginários puros;

2.2 Números Complexos - Formas de Representação

Antes de abordarmos os espectros discretos relembremos rapidamente alguns resultados fundamentais sobre os números complexos. O leitor que se sente confortável com a álgebra elementar e as diversas formas de representação dos números complexos pode passar diretamente para a Seção 2.3.

Números Complexos - Forma Cartesiana

Um número complexo é um número da forma $z = x + iy$, onde

- x é a parte real de z , e escrevemos $x = \text{Re}[z]$,
- y é a parte imaginária de z , e escrevemos $y = \text{Im}[z]$.

Os números complexos podem ser representados por pontos em um plano cartesiano. Este plano é denominado plano complexo, ou diagrama de Argand¹. Dado um número complexo, grafamos sua parte real no eixo horizontal (chamado eixo real) e sua parte imaginária no eixo vertical (chamado eixo imaginário). A Figura 2.1 ilustra tal representação.

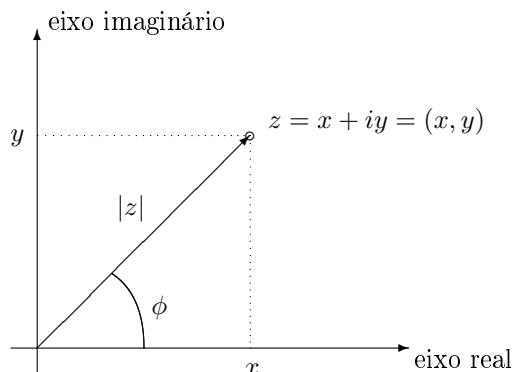


Figura 2.1: Representação do número complexo $z = x + iy$ no plano complexo.

Assim, cada número complexo $z = x + iy$ está associado biunivocamente² ao ponto (x, y) do plano complexo. Por esta razão, uma outra maneira de se denotar um número complexo $z = x + iy$ é através do par ordenado (x, y) , isto é,

$$z = x + iy = (x, y),$$

¹Jean Robert Argand (1768-1822), Matemático francês. Seu artigo sobre o plano complexo apareceu em 1806.

²A cada número complexo está associado um **único** ponto do plano, e a cada ponto do plano está associado um **único** número complexo.

chamada forma cartesiana do número complexo. Na forma cartesiana fica implícito que a primeira componente do par ordenado é a parte real do número complexo e a segunda componente é sua parte imaginária.

A amplitude (módulo) e a fase (argumento) de um número complexo

Dado um número complexo $z = x + iy$, sua amplitude (ou módulo, ou valor absoluto, ou magnitude), denotada $|z|$, é dada por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (2.16)$$

isto é, a amplitude de um número complexo é a raiz quadrada da soma do quadrado da parte real com o quadrado da parte imaginária. Geometricamente a amplitude de um número complexo nos dá a distância do ponto que o representa à origem do plano complexo. Para ver isto basta aplicar o Teorema de Pitágoras na Figura 2.1.

A fase (ou argumento) de $z = x + iy$, a qual denotaremos por $\arg(z)$ ou pela letra ϕ , é o ângulo formado entre o semi-eixo real positivo e o segmento que representa $|z|$ (Figura 2.1), e pode ser obtida pela expressão

$$\phi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0, \quad y \neq 0. \quad (2.17)$$

Se a parte real x ou a parte imaginária y de um número complexo $z = x + iy$ for nula, a determinação de sua fase torna-se um pouco mais sutil. Vejamos as possibilidades

(a) Se $x = 0$ nosso número complexo é da forma $z = 0 + iy = iy$, ou seja é um número imaginário puro e o ponto que o representa está sobre o eixo imaginário. O valor de sua fase depende do sinal da parte imaginária y :

(i) se $y > 0$, então $\arg(z) = \phi = \frac{\pi}{2}$ (veja o número z_1 na Figura 2.2);

(ii) se $y < 0$, então $\arg(z) = \phi = -\frac{\pi}{2}$ (veja o número z_2 na Figura 2.2).

(b) Se $y = 0$ nosso número complexo é da forma $z = x + i0 = x$, ou seja é um número real puro e o ponto que o representa está sobre o eixo real. O valor de sua fase depende do sinal da parte real x :

(i) se $x > 0$, então $\arg(z) = \phi = 0$ (veja o número z_3 na Figura 2.2);

(ii) se $x < 0$, então $\arg(z) = \phi = -\pi$ (veja o número z_4 na Figura 2.2).

Agrupando estes resultados com a equação (2.17), a fase de um número complexo $z = x + iy$ é dada por:

$$\phi = \begin{cases} \arctg\left(\frac{y}{x}\right) & , \quad \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \quad \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \quad \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0 \\ 0 & , \quad \text{se } y = 0 \text{ e } x > 0 \\ \pi & , \quad \text{se } y = 0 \text{ e } x < 0 \end{cases} . \quad (2.18)$$

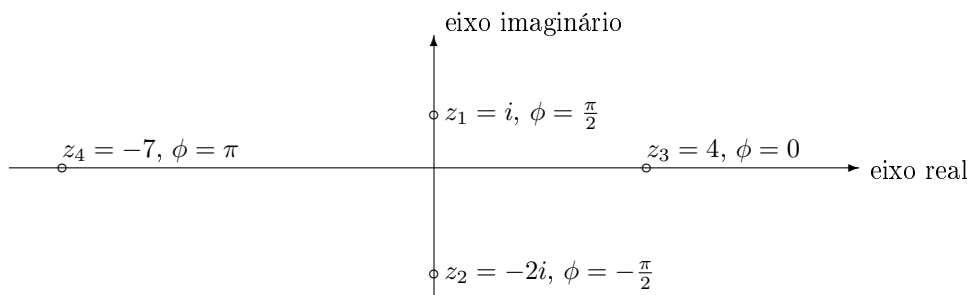


Figura 2.2: Alguns números complexos e suas respectivas fases (argumentos).

Números Complexos - Forma Polar (ou Trigonométrica)

Na Figura 2.1 observamos que $x = |z|\cos(\phi)$ e $y = |z|\sen(\phi)$, de modo que o número complexo $z = x + iy$ pode ser reescrito na forma

$$z = x + iy = |z|\cos(\phi) + i|z|\sen(\phi),$$

ou seja

$$z = |z|[\cos(\phi) + i\sen(\phi)], \tag{2.19}$$

chamada forma polar ou trigonométrica de z .

Números Complexos - Forma Exponencial

Pela definição da exponencial complexa $e^{x+iy} = e^x[\cos(y) + i\sen(x)]$, observamos que

$$\cos(\phi) + i\sen(\phi) = e^{i\phi},$$

de modo que a forma polar dada pela equação (2.19) pode ser reescrita como

$$z = |z|e^{i\phi}, \tag{2.20}$$

chamada forma exponencial de z .

Números Complexos - Forma Fasorial

Uma outra maneira de se representar um número complexo é através de sua forma fasorial

$$z = (|z|, \phi), \tag{2.21}$$

isto é, através de um par ordenado onde a primeira componente nos dá a amplitude do número complexo e a segunda componente nos dá sua fase. A Figura 2.3 ilustra alguns exemplos onde o primeiro par ordenado representa o número complexo na forma cartesiana e o segundo representa o número complexo na forma fasorial.

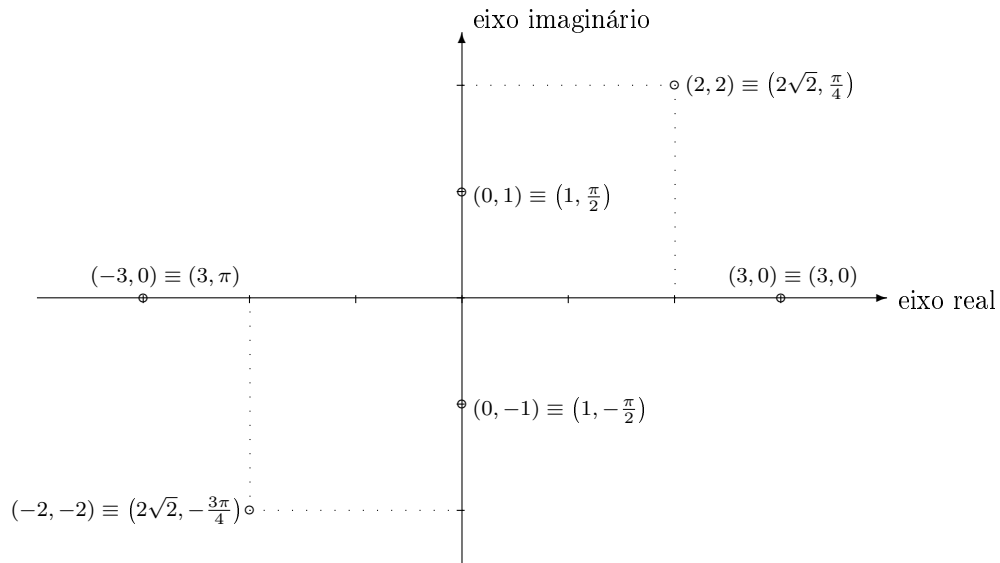


Figura 2.3: Alguns números complexos - forma cartesiana e forma fasorial.

2.2.1 Problemas Propostos

(1) Represente cada número complexo a seguir em um mesmo plano complexo. A seguir determine sua amplitude e sua fase e reescreva-o nas formas cartesiana, polar, exponencial e fasorial.

(a) $z = 2 + 2i$

(e) $z = -2 + \sqrt{3}i$

(i) $z = 3$

(b) $z = 3 - 3i$

(f) $z = 1 - \sqrt{3}i$

(j) $z = -5$

(c) $z = -1 - i$

(g) $z = -1 - \sqrt{3}i$

(k) $z = 2i$

(d) $z = 2 + \sqrt{3}i$

(h) $z = 2 + 2i$

(l) $z = -4i$

2.3 Os espectros de Amplitude e de Fase

Os coeficientes c_n da expansão de uma função em Série de Fourier Complexa são números complexos. Na verdade devemos entender c_n como uma função complexa de domínio discreto \mathbb{Z} , isto é, uma função da forma

$$c_n : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C},$$

que associa a cada inteiro $n \in \mathbb{Z}$ um número complexo $c_n \in \mathbb{C}$.

Por se tratar de uma função, gostaríamos de representar c_n na forma gráfica $c_n \times n$. Acontece que tal representação não é possível, uma vez que as imagens c_n são complexas. Para representarmos graficamente uma função complexa discreta $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ temos duas possibilidades.

- (a) Decompomos as imagens $f(n)$ em suas partes real e imaginária, isto é,

$$f(n) = Re[f(n)] + i Im[f(n)]$$

e a seguir os traçamos os gráficos $Re[f(n)] \times n$ e $Im[f(n)] \times n$ separadamente. Tal representação, apesar de perfeitamente plausível, possui pouca utilidade, pois geralmente não estamos interessados nos comportamentos de $Re[f(n)]$ e $Im[f(n)]$ de forma isolada.

- (b) Uma segunda possibilidade é reescrevermos $f(n)$ na forma fasorial

$$f(n) = (|f(n)|, \phi_n)$$

e a seguir traçamos os gráficos $|f(n)| \times n$ e $\phi_n \times n$ separadamente.

Usando o segundo raciocínio podemos representar c_n através de dois diagramas [4]: um para as amplitudes (conhecido como espectro de amplitudes) e outro para as fases (conhecido como espectro de fases):

- **Espectro de amplitudes:** é um diagrama onde grafamos os valores das amplitudes $|c_n|$ dos coeficientes de Fourier versus $n\omega_0$, isto é, um gráfico da forma³

$$|c_n| \times n\omega_0.$$

- **Espectro de fase:** é um diagrama onde grafamos os valores das fases ϕ_n dos coeficientes de Fourier versus $n\omega_0$, isto é, um gráfico da forma

$$\phi_n \times n\omega_0.$$

O próximo Exemplo ilustra a construção destes espectros.

³Observamos que nos espectros de amplitudes e de fases utilizamos $n\omega_0$ (isto é, múltiplos inteiros da frequência fundamental) como variável independente, e não simplesmente n . O motivo é simples: $n\omega_0$ são exatamente as frequências dos (infinitos) harmônicos que ocorrem na expansão em Série de Fourier.

Exemplo 2.4 *Determine os espectros de amplitudes e de fases da onda dente de serra do Exemplo 1.9 (página 24) mostrada na Figura 1.11 (página 25).*

Conforme vimos no Exemplo 1.9 esta onda quadrada tem período $T = 2\pi$, frequência fundamental $\omega_0 = 1$ e forma analítica

$$f(x) = x, \text{ se } -\pi \leq x < \pi \text{ e } f(x) = f(x + 2\pi).$$

Vimos também que os coeficientes trigonométricos são $a_0 = a_n = 0$ e

$$b_n = -\frac{2}{n} \cos(n\pi).$$

A partir dos coeficientes trigonométricos usamos as equações (2.6) e (2.10) para determinarmos c_n . Pela equação (2.6) temos

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \left[0 + i \frac{2}{n} \cos(n\pi) \right] = i \frac{\cos(n\pi)}{n}, \quad (2.22)$$

e pela equação (2.10) temos $c_0 = 0$. Usando a equação (1) (Formulário - página 53) podemos reescrever a equação (2.22) como

$$c_n = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n = 0; \\ \frac{i}{n} & , \text{ se } n > 0 \text{ e } n \text{ par ou se } n < 0 \text{ e } n \text{ ímpar,} \\ -\frac{i}{n} & , \text{ se } n > 0 \text{ e } n \text{ ímpar ou se } n < 0 \text{ e } n \text{ par,} \end{cases}$$

ou na forma fasorial

$$c_n = (|c_n|, \phi_n) = \begin{cases} (0, 0) & , \text{ se } n = 0; \\ \left(\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}\right) & , \text{ se } n > 0 \text{ e } n \text{ par ou se } n < 0 \text{ e } n \text{ ímpar,} \\ \left(\frac{1}{n}, -\frac{\pi}{2}\right) & , \text{ se } n > 0 \text{ e } n \text{ ímpar ou se } n < 0 \text{ e } n \text{ par,} \end{cases}$$

Para obtermos o espectro de amplitudes grafamos $|c_n|$ (a primeira componente de cada par ordenado da forma fasorial) em função de $n\omega_0$, neste caso, em função de $n\pi$. A Figura 2.4 ilustra o espectro obtido.

Para obtermos o espectro de fases grafamos ϕ_n (a segunda componente de cada par ordenado da forma fasorial) em função de $n\omega_0$, neste caso, em função de $n\pi$. A Figura 2.5 ilustra o espectro obtido.

2.3.1 Comentários sobre os Espectros de Amplitudes e de Fases

- (i) Geralmente um sinal é dado no domínio do tempo. Os espectros representam exatamente o sinal no domínio da frequência.

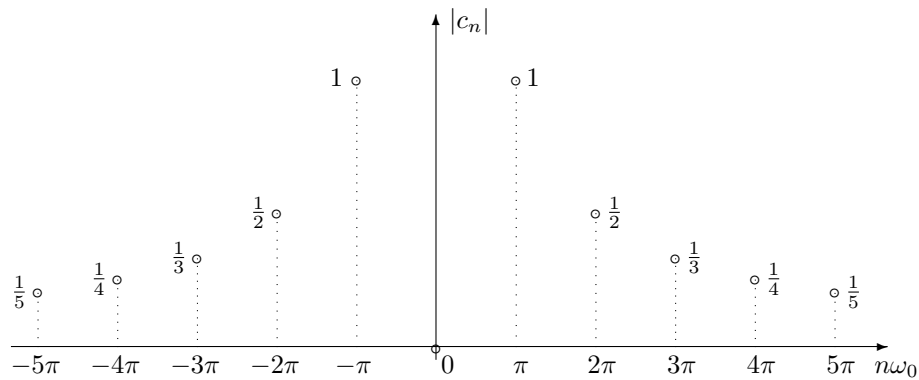


Figura 2.4: Espectro de amplitudes da onda dente de serra da Figura 1.11.

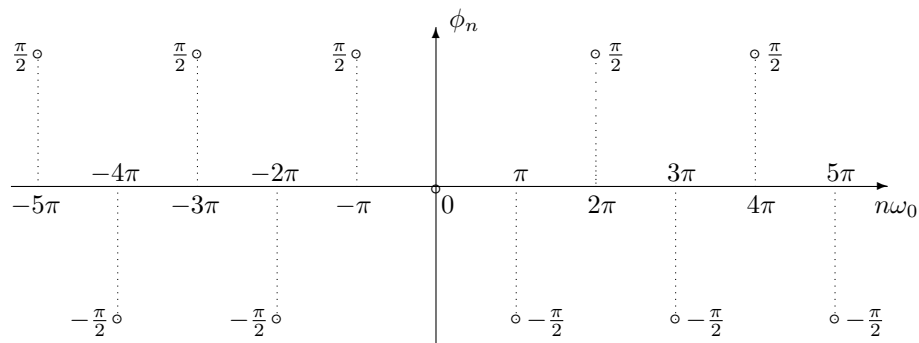


Figura 2.5: Espectro de fases da onda dente de serra da Figura 1.11.

- (ii) Sendo o sinal periódico no domínio do tempo os espectros de amplitudes e de fases são espectros discretos, uma vez que apenas os harmônicos cujas frequências são múltiplos inteiros da frequência do sinal (ou seja, múltiplos inteiros da frequência fundamental) são necessários para sua síntese.
- (iii) O espectro de amplitudes possui simetria par (veja a Figura 2.4) e o espectro de fases possui simetria ímpar (veja Figura 2.4). A verificação destes resultados fica a cargo do leitor (Problema 4). Devido a tais simetrias, algumas vezes os espectros são traçados apenas para $n \geq 0$.
- (iv) Para interpretarmos o significado dos espectros inicialmente observamos que cada har-

mônico exponencial é constituído de uma soma de harmônicos senoidais:

$$e^{in\omega_0 x} = \cos(n\omega_0 x) + i \operatorname{sen}(n\omega_0 x).$$

Usando a equação (2.20) podemos reescrever os coeficientes c_n na forma

$$c_n = |c_n| e^{i\phi_n}.$$

Assim, cada termo na Série Complexa dada pela equação (2.11) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} c_n e^{in\omega_0 x} &= |c_n| e^{i\phi_n} e^{in\omega_0 x} \\ &= |c_n| e^{i(n\omega_0 x + \phi_n)} \\ &= |c_n| [\cos(n\omega_0 x + \phi_n) + i \operatorname{sen}(n\omega_0 x + \phi_n)] \\ &= |c_n| \left[\cos \left[n\omega_0 \left(x + \frac{\phi_n}{n\omega_0} \right) \right] + i \operatorname{sen} \left[n\omega_0 \left(x + \frac{\phi_n}{n\omega_0} \right) \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

- Pela equação (2.23), a interpretação do espectro de amplitudes é imediata: nos mostra a amplitude de cada harmônico em cada uma das frequências que constituem o sinal. Por exemplo, na Figura 2.4 o ponto $(3\pi, \frac{1}{3})$ significa que o harmônico de frequência 3π , isto é, o harmônico $e^{i3\pi x}$, possui amplitude $\frac{1}{3}$.
- A interpretação do espectro de fases é mais sutil: pela equação (2.23) observamos que a translação horizontal (avanço ou atraso) de cada harmônico que constitui o sinal é dada por $\frac{\phi_n}{n\omega_0}$. Assim, como o espectro de fases nos dá a fase dos coeficientes c_n , para obtermos a translação horizontal de cada harmônico devemos dividir ϕ_n (a fase do coeficiente) por $n\omega_0$ (a frequência do harmônico). Por exemplo, na Figura 2.5 o ponto $(3\pi, -\frac{\pi}{2})$ significa que o harmônico de frequência 3π , isto é, o harmônico $e^{i3\pi x}$, deve ter sua fase atrasada (deslocada para a direita) de $\frac{\pi/2}{3\pi} = \frac{1}{6}$ radianos na síntese do sinal.

De posse dos espectros de amplitudes e de fases do sinal é possível obtermos sua representação em Série de Fourier, bastando reescrever os coeficientes c_n na forma exponencial dada pela equação (2.20). Assim

$$c_n = |c_n| e^{i\phi_n}, \quad (2.24)$$

onde $|c_n|$ é obtido a partir dos espectros de amplitudes e ϕ_n é obtido a partir do espectro de fases. O próximo Exemplo ilustra este procedimento.

Exemplo 2.5 *Obtenha a representação em Série de Fourier do sinal cujos espectros são dados nas Figuras 2.6 e 2.7*

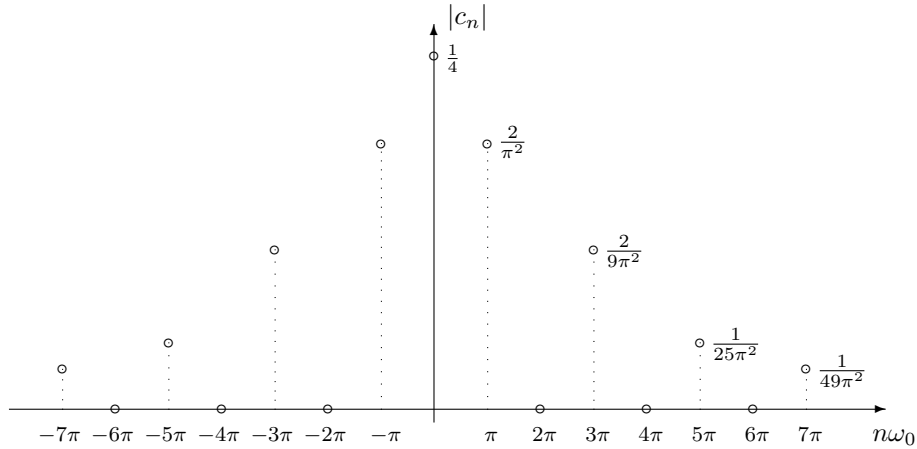


Figura 2.6: Espectro de amplitudes do Exemplo 2.5.

Pelo espectro de amplitudes (Figura 2.6) observamos que

$$|c_n| = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \quad \text{se } n = 0 \\ 0 & , \quad \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{2}{n^2\pi^2} & , \quad \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} ; \quad (2.25a)$$

e pelo espectro de fases (Figura 2.7)

$$\phi_n = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } n \text{ é par} \\ \pi & , \quad \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} . \quad (2.25b)$$

Usando a equação (2.24), as equações (2.25a) e (2.25b) podem ser combinadas para obtermos (lembrando-se que $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$)

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \quad \text{se } n = 0 \\ 0 & , \quad \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{2}{n^2\pi^2} & , \quad \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} . \quad (2.25c)$$

Assim, de acordo com a equação (2.11), observando nos espectros que $\omega_0 = \pi$, a representação em Série de Fourier complexa deste sinal é dada por⁴

$$f(x) \sim \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{i(2k+1)\pi x} .$$

⁴Compare com a equação (2.15c).

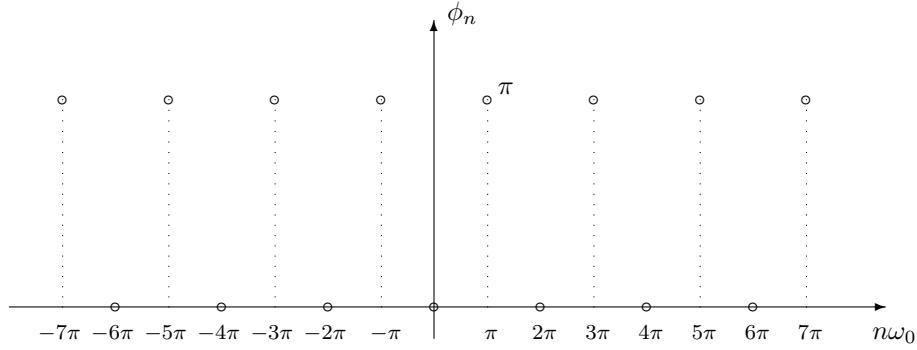


Figura 2.7: Espectro de fases do Exemplo 2.5.

ou, na forma expandida

$$f(x) \sim \dots - \frac{2}{25\pi^2} e^{-5i\pi x} - \frac{2}{9\pi^2} e^{-3i\pi x} - \frac{2}{\pi^2} e^{-i\pi x} + \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} e^{i\pi x} - \frac{2}{9\pi^2} e^{3i\pi x} - \frac{2}{25\pi^2} e^{5i\pi x} - \dots$$

Para obtermos os coeficientes trigonométricos inicialmente observamos, pela equação (2.25c), que $c_n = \bar{c}_n$. Assim, pela equação (2.14c) temos

$$a_n = c_n + \bar{c}_n = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n \text{ é par} \\ -\frac{4}{n^2\pi^2} & , \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases} ,$$

e pela equação (2.14d)

$$ib_n = c_n - \bar{c}_n = 0, \text{ donde } b_n = 0.$$

Finalmente, pela equação (2.10), temos $a_0 = \frac{1}{2}$. Assim, de acordo com a equação (2.1), a representação em Série de Fourier trigonométrica deste sinal é dada por⁵

$$f(x) \sim \frac{1}{4} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos[(2k-1)\pi x].$$

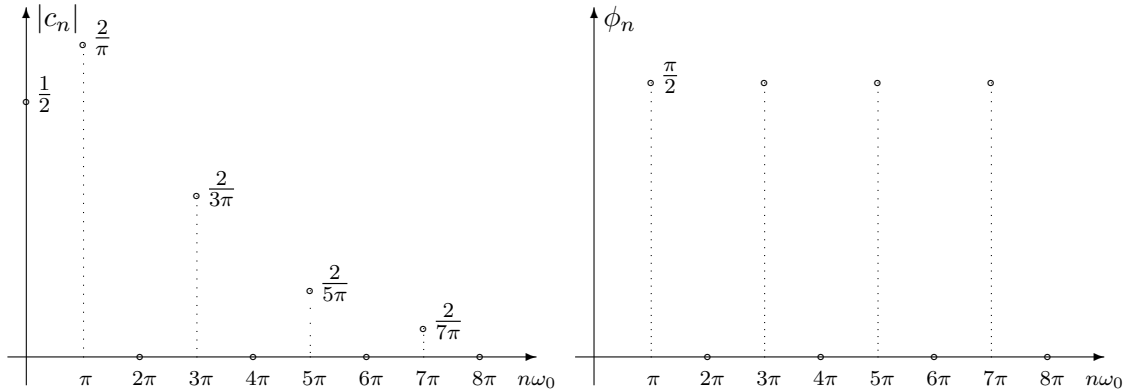
ou, na forma expandida

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos(\pi x) - \frac{4}{9\pi^2} \cos(3\pi x) - \frac{4}{25\pi^2} \cos(5\pi x) + \dots$$

⁵ Compare com a equação (1.13c).

2.3.2 Problemas Propostos

- (1) A partir dos coeficientes complexos obtidos no Exemplo 2.1 (página 36), trace os espectros de amplitudes e de fases da onda quadrada da Figura 1.4 (página 11).
- (2) A partir dos coeficientes complexos obtidos no Exemplo 2.3 (página 38), trace os espectros de amplitudes e de fases da onda triangular da Figura 1.5 (página 13).
- (3) A partir dos coeficientes complexos obtidos no Problema 7 (página 40), trace os espectros de amplitudes e de fases da onda da Figura 1.10 (página 23).
- (4) Mostre que os espectros de amplitudes sempre possui simetria par e o espectro de fases sempre possui simetria ímpar.

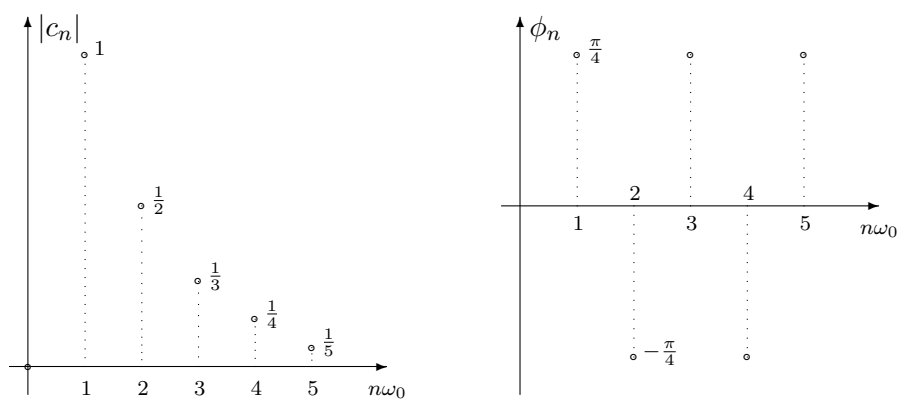


(a) Espectros de amplitudes do Problema 5.

(b) Espectros de fases do Problema 5.

Figura 2.8: Espectros do Problema 5.

- (5) Obtenha a representação em Série de Fourier (Complexa e Trigonométrica) do sinal cujos espectros são dados na Figura 2.8.
- (6) Obtenha a representação em Série de Fourier (Complexa e Trigonométrica) do sinal cujos espectros são dados na Figura 2.9.
- (7) Mostre que para uma função periódica um atraso τ no tempo não tem nenhum efeito sobre o espectros de amplitudes mas altera o espectro de fases por $-n\omega_0\tau$, isto é, gera um atraso de $n\omega_0\tau$ para a componente de frequência $n\omega_0$.



(a) Espectros de amplitudes do Problema 6.

(b) Espectros de fases do Problema 6.

Figura 2.9: Espectros do Problema 6.

Formulário

Resumimos aqui alguns resultados e algumas primitivas correntemente utilizadas quando trabalhamos com Séries de Fourier. Sugerimos ao leitor verificar a veracidade de cada um destes resultados quando utilizá-los pela primeira vez.

$$(1) \cos(n\pi) = (-1)^n = \begin{cases} 1 & , \text{ se } n \text{ é par} \\ -1 & , \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases} , \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) \operatorname{sen}(n\pi) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$(3) \int x \operatorname{sen}(n\omega_0 x) dx = -\frac{x}{n\omega_0} \cos(n\omega_0 x) + \frac{1}{n^2 \omega_0^2} \operatorname{sen}(n\omega_0 x).$$

$$(4) \int x \cos(n\omega_0 x) dx = \frac{x}{n\omega_0} \operatorname{sen}(n\omega_0 x) + \frac{1}{n^2 \omega_0^2} \cos(n\omega_0 x).$$

$$(5) \int x e^{-in\omega_0 x} dx = \left(\frac{ix}{n\omega_0} + \frac{1}{n^2 \omega_0^2} \right) e^{-in\omega_0 x}.$$

$$(6) \int x^2 \operatorname{sen}(n\omega_0 x) dx = -\frac{x^2}{n\omega_0} \cos(n\omega_0 x) + \frac{2x}{n^2 \omega_0^2} \operatorname{sen}(n\omega_0 x) + \frac{2}{n^3 \omega_0^3} \cos(n\omega_0 x).$$

$$(7) \int x^2 \cos(n\omega_0 x) dx = \frac{x^2}{n\omega_0} \operatorname{sen}(n\omega_0 x) + \frac{2x}{n^2 \omega_0^2} \cos(n\omega_0 x) - \frac{2}{n^3 \omega_0^3} \operatorname{sen}(n\omega_0 x).$$

Referências Bibliográficas

- [1] [Boyce1990] Boyce, Willian E.; Diproima, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Terceira Edição. Editora Guanabara Koogan S.A. Rio de Janeiro, RJ, 1990.
- [2] [Edwards1995] Edwards Jr, C.H.; Penney, D. E. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Terceira Edição. Editora Prentice-Hall do Brasil. Rio de Janeiro, RJ, 1995.
- [3] [Djairo1977] Figueiredo, Djairo Guedes. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977 (Projeto Euclides).
- [4] [Hsu1970] Hsu, Hwei P. **Análise de Fourier**. Livros Técnicos e Científicos Ltda. Rio de Janeiro, Guanabara, 1970.