1 Introdução

1.1 Definições

Definição 1.1. *Se uma variável pode assumir qualquer valor, independente de outra variável, ela é chamada independente. Por exemplo, as variáveis x,y,z,t,h são independentes. Para representar o conjunto de todas as variáveis independentes num certo problema, usaremos a notação* $\{x\}$*, onde* x *é uma das variáveis do problema.*
Definição 1.2. *Quando uma variável depende de outra, ou outras, ela é dita dependente. Dizemos também que essa variável é uma função das variáveis das quais ela depende. Ela não pode assumir qualquer valor, pois depende de outras variáveis. São exemplos de variáveis dependentes as seguintes funções:* $y(x), z(x,y), h(x,y,z), x(y), y(x,z,t), f(x,y)$. *Para representar o conjunto de todas as variáveis dependentes num certo problema, usamos a notação* $\{y(\{x\})\}$.
Definição 1.3. *Uma equação diferencial é, basicamente, uma equação que envolve as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes com relação à uma ou mais variáveis independentes. Então, as equações*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \cos t \tag{2}$$

$$\frac{d^3y}{dz^3} + y\frac{d^2x}{dz^2} = \ln z \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^3 + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

são exemplos de equações diferenciais.

Como se percebe nas equações acima, existem vários tipos de equações diferenciais. Sendo assim, elas foram classificadas de acordo com alguns critérios.
Definição 1.4. *Uma equação diferencial que envolve apenas derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a apenas* ***uma*** *variável independente é chamada equação diferencial ordinária. As equações (1), (2) e (3) são exemplos de equações diferencias ordinárias. Na equação*

1.1, a variável independente é x, enquanto que a dependente é $y = y(x)$. Na equação (2), a variável independente é t, e agora $x = x(t)$ é uma variável dependente. Por fim, na equação (3) temos duas funções da variável z, que são $x(z)$ e $y(z)$.

Definição 1.5. *Uma equação diferencial que envolve derivadas parciais de um ou mais variáveis dependentes em relação a mais de uma variável independente é chamada equação diferencial parcial. As equações (4) e (5) são exemplos de equações diferenciais parciais. Na equação (4), s e t são as variáveis independentes, e temos $v = v(s,t)$. Na equação (5), temos $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$, que são variáveis dependentes, e x e y são as independentes.*

Definição 1.6. *A derivada de maior ordem numa equação diferencial define a ordem da equação diferencial. Assim, a equação (1) é de segunda ordem, ao passo qua a equação (2) é de quarta ordem; (3) é de terceira ordem, (4) é de primeira ordem e (5) também é de segunda ordem.*

Definição 1.7. *Se uma equação diferencial for tal que nos seus termos não aparecem*

- *funções transcendentais da variável ou variáveis dependentes, ou de suas derivadas, como, por exemplo,* $\ln y(x)$, $\cos\left(\frac{dz}{dt}\right)$, $\sin\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\right)$*;*
- *produtos entre as variáveis dependentes, entre as variáveis dependentes e suas derivadas, ou entre as derivadas das variáveis dependentes, como, por exemplo,* $[y(x)]^2$, $\left(\frac{dt}{dh}\right)^2$, $y(x)\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dt}\frac{dh}{dt}$, $x(y,z)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\frac{\partial x}{\partial y}$*;*

então a equação diferencial é uma equação diferencial linear. Se aparecer algum desses termos, a equação é chamada equação diferencial não - linear. As equações (2) e (4) são equações diferenciais lineares, enquanto que as equações (1),(3) e (5) são não - lineares.

Quando uma equação diferencial é linear e ordinária de ordem n e possui apenas uma variável dependente, ela pode ser posta na forma geral

$$a_o(x)\frac{d^m y}{dx^m} + a_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x) \tag{6}$$

onde $a_o(x)$ não é identicamente nulo, x é a variável independente e $y(x)$ é a única função de x. A expressão acima é a forma mais geral para uma equação diferencial linear e ordinária de ordem n com apenas uma variável dependente.

As equações

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \tag{7}$$

$$3j^2\frac{d^4x}{dj^4} - \frac{1}{j}\frac{d^2x}{dj^2} + jx = je^j \tag{8}$$

são exemplos de equações diferenciais ordinárias lineares. A equação (7) é de segunda ordem e a (8) é de quarta ordem.

1.2 Importância das Equações Diferenciais

Além do ponto de vista matemático, por si só relevante, o estudo de equações diferenciais é muito importante do ponto de vista físico. Os físicos ao estudarem alguns fenômenos, procuram inicialmente descrevê-lo de forma qualitativa e posteriormente de forma quantitativa.

Para uma boa parte dos sistemas físicos conhecidos até o momento, a equação ou equações que descrevem os fenômenos, pelo menos de forma aproximada, são equações diferenciais. As soluções de uma equação diferencial são explícitas pu implícitas.

Definição 1.8. *Uma solução explícita de uma equação diferencial é uma função* $y = f(\{x\})$ *do conjunto das variáveis independentes, a qual, quando substituída na equação diferencial, a transforma em uma igualdade.*

Como exemplo, a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = 2x$$

tem uma solução explícita dada por

$$x(t) = ce^{2t}$$

pois, se substituirmos $x(t)$ na equação, temos (c é uma constante)

$$\frac{dx}{dt} = 2x$$

$$\frac{d}{dt}\left(ce^{2t}\right) = 2\left(ce^{2t}\right)$$

$$2ce^{2t} = 2ce^{2t}$$

que é obviamente uma igualdade.

Definição 1.9. *Uma solução implícita de uma equação diferencial é uma função* $g(\{y\}, \{x\})$ *do conjunto de variáveis dependentes e independentes, a qual, através de derivações implícitas, reproduz a equação diferencial inicial.*

Neste caso, temos que a função

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$$

é uma solução implícita da equação diferencial

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

pois, tomando a derivada implícita de $f(x, y)$ com relação a x, temos

$$\frac{d}{dx}f(x, y) = \frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 25) = \frac{d}{dx}0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

que é a equação diferencial inicial. Esta solução implícita pode ser desmembrada em duas outras, f_1 e f_2, que neste caso são explícitas, a saber,

$$f_1(x) = y_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

$$f_2(x) = y_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$$

Todavia, esse desmembrmento em geral não é possível, e ficamos apenas com a solução implícita. Alguns exemplos de aplicações de equações diferenciais são:
1) movimento de projéteis, planetas e satélites;
2) estudo do decaimento radioativo de núcleos instáveis;
3) propagação do calor através de uma barra;
4) estudo de todos os tipos de ondas;
crescimento de população;
6) estudo de reações químicas;
7) descrição quântica de um átomo de hidrogênio;
8) cálculo do potencial elétrico de uma distribuição de cargas;
9) estudo do oscilador harmônico.

Os sistemas acima são uma amostra da grande utilização das equações diferenciais. É possível que, para um dado problema, além da equação diferencial em si exista mais alguma condição que o experimento deve satisfazer. Então, temos os seguintes casos:

Definição 1.10. *Quando um dado fenômeno, além de uma equação diferencial que o descreve, tem ainda que seguir certas condições iniciais, estabelecidas a priori, para um mesmo valor da variável independente, dizemos que temos um problema de valor inicial. Como exemplo, considere um corpo em queda livre. O movimento desse é descrito por uma equação diferencial, e as condições são a altura da qual ele foi solto e a valocidade inicial com a qual ele iniciou o movimento. Se a queda for no vácuo, temos considerando a origem no chão e a altura representada por $y(t)$, a equação*

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

com as condições iniciais

$$y(0) = y_o \qquad e \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_0 = y^{'}(0) = v(0) = v_o$$

e a função $y(t)$, que é solução desta equação diferencial, tem necessariamente que respeitar as condições iniciais, que foram dadas para o valor de $t = 0$.

Definição 1.11. *Se um fenômeno descrito por uma equação diferencial tiver alguma condição especificada para dois ou mais valores da variável independente, temos um problema com condições de contorno. Por exemplo, considerando um caso idêntico ao anterior, mas com condições dadas em duas alturas diferentes, ou seja, algo como*

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

com as condições de contorno

$$y(0) = y_o$$

$$y(2) = y_2$$

temos um problema com condições de contorno, dadas para os tempos $t = 0$ e $t = 2$. Nem sempre um problema com condições de contorno tem solução apesar de que a equação diferencial sozinha, sem considerar as condições de contorno, pode ter.

2 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Veremos alguns métodos de resolução de equações diferenciais de primeira ordem, lembrando a equação (6), pode ser colocada na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{9}$$

na qual a função $f(x, y)$ pode ser escrita com uma razão de duas outras funções, ou seja,

$$f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

e a equação (9) pode ser reescrita na forma equivalente

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{10}$$

Por exemplo, a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 - y}{x}$$

pode ser reescrita como

$$xdy - (2x^2 - y)dx = 0$$

ou

$$(y + 2x^2)dx + xdy = 0$$

e assim, temos $M(x, y) = y - 2x^2$ e $N(x, y) = x$. Na notação (9) fica claro que y é a função de x, enquanto que na (10) podemos interpretar que $y = y(x)$ ou $x = x(y)$, conforme for o caso. Em certas situações, é mais fácil considerar um ponto de vista do que outro, e então é preferível resolver a equação diferencial sob esse ponto de vista e, se for necessário, obtemos a função inversa após completar a resolução da equação. Vejamos alguns casos especiais.

2.1 Equações Diferenciais Exatas

Definição 2.11 *Seja F uma função de duas variáveis reais, de forma que F tenha as derivadas parciais primeiras contínuas. A diferencial total dF da função F é definida por*

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}dy \tag{11}$$

Como exemplo, considere a função

$$F(x,y) = x^2y + 3y^3x$$

Temos

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2xy + 3y^3 \qquad e \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^2 + 9y^2x$$

e, portanto,

$$dF(x,y) = (2xy + 3y^3)dx + (x^2 + 9y^2x)dy$$

Definição 2.2. *A expressão*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{12}$$

é chamada uma diferencial exata se existe uma função $F(x,y)$ tal que se verifique

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad e \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Se $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ é uma diferencial exata, a equação diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

é chamada uma equação diferencial exata.

Como fazemos para saber quando uma diferencial e uma equação diferencial são exatas? A resposta é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 2.1 *A equação diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

é exata se, e somente se, for verificado que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{13}$$

Demonstração. A prova do teorema 2.1 nos conduz ao método de resolução de uma equação diferencial exata. Vejamos a primeira parte. Consideremos que a equação diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é exata e que, portanto, existe uma função $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad e \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \qquad e \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

No entanto, a ordem das derivadas pode ser invertida, ou seja,

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

e, dessa forma, temos

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Na outra parte da prova, iniciamos com a hipótese

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

e queremos provar que existe uma função $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad e \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

de forma que a equação diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ seja exata. Vamos assumir a expressão

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

seja verdadeira. Então, podemos fazer

$$F(x,y) = \int M(x,y)\partial x + \phi(y) \tag{14}$$

onde a integral é efetuada apenas em x, sendo y considerado como uma constante. O termo $\phi(y)$ aparece porque deveos ter a solução mais geral possível para $F(x,y)$. Agora, diferenciamos esta equação com a y, ou seja,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

Se queremos provar que a diferencial é exata, devemos ter também

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

e então obtemos

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\partial x$$

e, resolvendo esta expressão para $\phi(y)$, temos

$$\phi(y) = \int \left[N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\partial x\right] dy$$

que, combinanda com a equação (14), fornece, finalmente,

$$F(x,y) = \int M(x,y)\partial x + \int \left[N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\partial x\right] dy \tag{15}$$

e esta função $F(x,y)$ está sujeita às condições

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

e também

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad e \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

e, portanto, a equação diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é exata. Se, ao invés de iniciarmos a demonstração considerando a equação

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

usássemos a outra equação

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

o resultado seria

$$F(x,y) = \int N(x,y)\partial y + \int \left[M(x,y) - \int \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\partial y\right] dx \tag{16}$$

Qual é a solução da equação $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$? A resposta é: a solução da equação diferencial exata é a função $F(x,y) = c$, onde $F(x,y)$

é dada por uma das expressões (15) ou (16), e c é uma constante numérica que pode ser determinada se houver alguma condição adicional. Vejamos um exemplo completo, considerando a equação abaixo:

$$(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0$$

Desta equação, temos $M(x, y) = 3x^2 + 4xy$ e $N(x, y) = 2x^2 + 2y$. Portanto, devemos verificar se ela é uma equação diferencial exata e, pora tanto, calculamos

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 4x \qquad e \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 4x$$

Vemos que são iguais, logo, a equação é exata. Assim, temos

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = 3x^2 + 4xy \qquad e \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = 2x^2 + 2y$$

Utilizando a primeira, obtemos

$$F(x,y) = \phi(y) + \int M(x,y)\partial x$$

$$= \phi(y) + \int (3x^2 + 4xy)\partial x$$

$$F(x,y) = x^3 + 2x^2y + \phi(y)$$

mas à segunda nos diz que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = 2x^2 + 2y$$

$$2x^2 + \frac{d\phi(y)}{dy} = 2x^2 + 2y$$

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = 2y$$

A equação acima dá, diretamente,

$$d\phi(y) = 2ydy$$

$$\int d\phi(y) = \int 2y dy$$

$$\phi(y) = y^2 + c_o$$

e, portanto, temos

$$F(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^2 + c_o$$

mas como a solução da equação diferencial é da forma $F(x, y) = c$, e assim,

$$F(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^2 + c_o = c$$

ou, finalmente, incorporando c_o a c, temos

$$x^3 + 2x^2y + y^2 = c \tag{17}$$

que é a solução geral da equação diferencial exata inicial. Se considerarmos uma condição inicial, como, por exemplo, $y(1) = 0$, podemos obter a constante c, pois, neste caso, devemos ter $x = 1$ e $y = 0$, ou seja,

$$1^3 + 2.1^2.0 + 0^2 = c$$

$$c = 1$$

e, pora este caso, a solução fica

$$x^3 + 2x^2y + y^2 = 1$$

Vejamos agora mais um tipo de equação diferencial.

2.2 Equações Diferenciais Separáveis

Definição 2.3. *As equações do tipo*

$$F(x)G(y)dx + f(x)g(y)dy = 0 \tag{18}$$

são chamadas de equações diferenciais separáveis porque elas podem sr colocadas na forma

$$\frac{F(x)}{f(x)}dx + \frac{g(y)}{G(y)}dy = 0 \tag{19}$$

que é uma equação exata, pois

$$M(x,y) = M(x) = \frac{F(x)}{f(x)} \qquad e \qquad N(x,y) = N(y) = \frac{g(y)}{G(y)}$$

e, para verificar se ela é exata, calculamos

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F(x)}{f(x)}\right) = 0 \qquad e \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g(y)}{G(y)}\right) = 0$$

como as derivadas acima são iguais, a equação (19) é exata e pode ser escrita na forma $M(x)dx + N(y)dy = 0$, que pode ser imediatamente integrada, resultando em

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c \tag{20}$$

ou também,

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}dx + \int \frac{g(y)}{G(y)}dy = c \tag{21}$$

As equações (20) ou (21) fornecem a solução da equação diferencial separável (19)

Vejamos agora um exemplo. Considere a equação

$$x \sin y dx + (x^2+1)\cos y dy = 0$$

Esta equação não é exata, mas pode ser transformada em uma equação diferencial separável se dividirmos a equação pelo fator $(x^2+1)\sin y$, isto é,

$$\frac{x}{x^2+1}dx + \frac{\cos y}{\sin y}dy = 0$$

o resultado fica

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{\cos y}{\sin y}dy = c$$

lembrando que

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

ficamos com

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln|\sin y| = c_o$$

Multiplicando esta expressão por 2 e chamando $2c_o = \ln|c_1|$, temos

$$\ln(x^2+1) + \ln(\sin^2 y) = \ln(c_1)^2$$

ou ainda, chamamos $c = c_1^2$

$$\ln\left[(x^2+1)\sin^2 y\right] = \ln(c)$$

e, finalmente,

$$(x^2+1)\sin^2 y = c \tag{22}$$

que é a solução da equação diferencial inicial. Se houver alguma condição adicional, como, por exemplo, $y(0) = \frac{\pi}{2}$ teremos

$$1\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = c$$

$$c = 1$$

e a equação será

$$(x^2+1)\sin^2 y = 1$$

É importante notar que, ao dividir a equação por $(x^2+1)\sin y$, etamos considerando que $\sin y \neq 0$, ou seja, se $y = n\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$?

A equação diferencial inicial pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{x^2+1}\frac{\sin y}{\cos y}$$

como $\sin y = 0$, $y = n\pi$, e, substituindo esta solução na equação diferencial, encontramos

$$\frac{d}{dx}(n\pi) = -\frac{x}{x^2+1}\frac{\sin n\pi}{\cos n\pi}$$

$$= 0 - \frac{x}{x^2+1}\frac{0}{(-1)^n}$$

$$0 = 0$$

Então, $y = n\pi$ também é solução e corresponde ao valor $c = 0$ na equação (22). Assim, nenhuma solução da equação diferencial foi perdida ao fazermos a transformação para a forma separável.

2.3 Equações Diferenciais Homogêneas

Definição 2.4 *Uma função F é dita homogênea de grau n se ocorrer que*

$$F(tx, ty) = t^n F(x, y)$$

ou seja, quando em $F(x, y)$ substituímos x por tx e y por ty e depois fatoramos o t, a expressão resultante fica na forma acima. Por exemplo, se $F(x, y) = x^3 + x^2 y$, temos

$$F(tx, ty) = (tx)^3 + (tx)^2(ty)$$

$$= t^3x^3 + t^2x^2ty$$

$$= t^3x^3 + t^3x^2y$$

$$= t^3(x^3 + x^2y)$$

$$F(tx, ty) = t^3F(x, y)$$

e

$$F(x, y) = x^3 + x^2y$$

é homogênea de grau 3

Definição 2.5 *A equação de primeira ordem $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ é homogênea se, quando escrita na forma*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

existir uma função g tal que $f(x, y)$ possa ser colocada na forma

$$f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

e a equação diferencial fica

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

De forma equivalente, a equação diferencial é homogênea se as funções $M(x,y)$ e $N(x,y)$ forem homogêneas de mesmo grau.

Vejamos um exemplo. A equação diferencial

$$xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

é homogênea. Vamos conferi-la pelos métodos. Primeiro, escrevendo-a na forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{x^2 + y^2}$$

vemos que podemos reescrevê-la como

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{x^2(1 + \frac{y^2}{x^2})}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{x}{y}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

e, neste caso,

$$g\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

e a equação diferencial é homogênea. Agora vamos analisá-la pelo segundo método. Neste caso, temos $M(x,y) = xy$ e $N(x,y) = x^2 + y^2$. Assim,

$$M(tx,ty) = (tx)(ty)$$

$$= t^2xy$$

$$M(tx,ty) = t^2M(x,y)$$

e $M(x,y)$ é homogênea de grau 2. Para $N(x,y)$ temos

$$N(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2$$

$$= t^2x^2 + t^2y^2$$

$$= t^2(x^2 + y^2)$$

$$N(tx, ty) = t^2 N(x, y)$$

e $N(x, y)$ também é homogênea de grau 2, como $M(x, y)$. Portanto, a equação diferencial é homogênea.

Como se resolve uma equação diferencial homogênea? A resposta é dada pelo seguinte teorema, e pela sua prova.

Teorema 2.2 *Se a equação diferencial*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{23}$$

é homogênea, a mudança de variáveis $y = vx$, ou $v = \frac{y}{x}$, transforma a equação (23) numa equação diferencial separável nas variáveis v e x.

Demonstração. A equação (23) é homogênea. Então, podemos escrevê-la na forma

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

como vimos na definição 2.5. Agora, fazemos $y = vx$. Então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(vx) = v + x\frac{dv}{dx}$$

e a equação diferencial fica

$$v + x\frac{dv}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right) = g(v)$$

pois $v = \frac{y}{x}$. Podemos reescrever a expressão acima na forma

$$[v - g(v)]\, dx + xdv = 0$$

que é a equação diferencial separável, e assim,

$$\frac{dv}{v - g(v)} + \frac{dx}{x} = 0$$

A resolução é feita por integração direta, ou seja,

$$\int \frac{dv}{v - g(v)} + \int \frac{dx}{x} = c$$

onde c é uma constante de integração. A solução geral fica

$$\int \frac{dv}{v - g(v)} + \ln|x| = c \tag{24}$$

e, após resolver a integral, devemos substituir novamente $v = \frac{y}{x}$ para voltar às variáveis iniciais.

Examinamos um exemplo. Já vimos que a equação

$$xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

é homogênea. Vamos reescrevê-la como

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{x}{y}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}$$

e fazer a substituição $y = vx$. Assim, ficamos com

$$\frac{d}{dx}(vx) = -\frac{v}{1 + v^2}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{1 + v^2}$$

$$x\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{1 + v^2} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = -\frac{v(2 + v^2)}{1 + v^2}$$

que pode ser escrita como

$$\frac{1 + v^2}{v(2 + v^2)}dv + \frac{dx}{x} = 0$$

que é uma equação diferencial separavél. Integrando esta expressão, temos

$$\int \left[\frac{1 + v^2}{v(2 + v^2)}\right] dv + \int \frac{dx}{x} = c$$

que, mediante a utilização de frações parciais, resulta em

$$\frac{1}{2}\ln|v| + \frac{1}{4}\ln(v^2 + 2) + \ln|x| = c_o$$

Chamando $c_o = \ln|c_1|$, temos

$$\frac{1}{2}\ln|v| + \frac{1}{4}\ln(v^2+2) = \ln|c_1| - \ln|x|$$

$$\frac{1}{2}\ln|v| + \frac{1}{4}\ln(v^2+2) = \ln\frac{|c_1|}{|x|}$$

Multiplicando esta expressão por 4, e agrupando os logaritimos, temos

$$\ln\Big[v^2(v^2+2)\Big] = \ln\left(\frac{c_1}{x}\right)^4$$

ou

$$v^2(v^2+2) = \left(\frac{c_1}{x}\right)^4$$

como $v = \frac{y}{x}$, temos

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\right] = \left(\frac{c_1}{x}\right)^4$$

$$\frac{y^2}{x^2}\left[\frac{y^2+2x^2}{x^2}\right] = \left(\frac{c_1}{x}\right)^4$$

$$\frac{y^2}{x^4}(y^2+2x^2) = \left(\frac{c_1}{x}\right)^4$$

$$y^4 + 2x^2y^2 = c_1^4$$

e, definindo uma constante $c = c_1^4$, temos, finalmente,

$$y^4 + 2x^2y^2 = c \tag{25}$$

que é a solução (implícita) da equação diferencial inicial.

Até agora vimos equações diferenciais que podem ser lineares. Vamos concentrar nossa atenção nas equações lineares de primeira ordem.

2.4 Equações Diferenciais Lineares

Definição 2.6 *Se for possível escrever uma equação ordinária de primeira ordem na forma*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{26}$$

esta diferencial será uma equação linear.

Como exemplo, a equação

$$x^2\frac{dy}{dx} + (x^4 - 2x + 1)y = \frac{1}{x}$$

pode ser calocada na forma

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{x^4 - 2x + 1}{x^2}\right)y = \frac{1}{x^3}$$

ou ainda,

$$\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)y = \frac{1}{x^3}$$

que é linear, porque está no tipo da equação 2.18.

A equação (26) pode ser reescrita na forma

$$[P(x)y - Q(x)]\,dx + dy = 0 \tag{27}$$

que é uma equação do tipo $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, onde $M(x,y) = P(x)y - Q(x) e N(x,y) = 1$. Esta equação não é exata, pois

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = P(x) \qquad e \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0$$

No entanto, se utilizarmos um fator integrante, ela pode ser convertida numa equação diferencial exata.

Definição 2.7 *Um fator integrante $\mu(x,y)$ é uma função que, multiplicada pela equação diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

a transforma numa equação diferencial exata, ou seja, na equação

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{28}$$

que é, por definição, exata

Por exemplo, a equação diferencial

$$ydx + 2xdy = 0$$

não é exata, pois $M(x, y) = y$, $N(x, y) = 2x$ e

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2$$

Entretanto, se multiplicarmos esta equação por y, teremos

$$y^2 dx + 2xydy = 0$$

e agora, $M(x, y) = y^2$, $N(x, y) = 2xy$ e

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2y$$

e a equação diferencial torna-se uma equação exata, sendo $\mu(x, y) = y$ o seu fator integrante.

Se utilizarmos fatores integrantes, a equação diferencial linear (26) pode ser resolvida através do seguinte teorema:

Teorema 2.3 *A equação diferencial linear*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

tem um fator integrante na forma

$$\mu(x, y) = e^{\int P(x)dx}$$

e sua solução é dada por

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \left[\int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + c \right] \tag{29}$$

Demonstração. Considere a equação diferencial (27). Vamos multiplícá-la por um fator integrante $\mu(x)$ que a torne uma equação exata, ou seja,

$$[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)]\, dx + \mu(x)dy = 0$$

Por definição, a equação diferencial acima é exata, e assim,

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)]$$

que se reduz a

$$\mu P(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

que pode ser separada em

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$$

e entegrada, resultando em

$$\ln|\mu| = \int P(x)dx$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Agora multiplicamos a equação diferencial (26) pelo fator integrante, isto é,

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)y = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

o lado esquerdo pode ser reescrito, pois

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}dy\right] = e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + ye^{\int P(x)dx}P(x)$$

e assim, a equação diferencial fica

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}dy\right] = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

$$d\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}Q(x)dx$$

$$\int d\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx$$

$$e^{\int P(x)dx}y = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + c$$

ou, finalmente,

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + c\right]$$

Vejamos agora um exemplo de aplicação. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = 6x^2$$

Nesta equação, $P(x) = \frac{3}{x}$ e $Q(x) = 6x^2$. Então,

$$\mu(x) = exp\left[\int P(x)dx\right]$$

$$= exp\left[\int \left(\frac{3}{x}\right) dx\right]$$

$$= exp(3\ln|x|)$$

$$= e^{\ln|x^3|}$$

$$\mu(x) = x^3$$

multiplicando a equação diferencial por $\mu(x)$, temos

$$x^3\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^5$$

O lado esuqerdo é, na verdade,

$$\frac{d}{dx}(x^3y) = x^3\frac{dy}{dx} + y(3x^2)$$

e a equação diferencial fica

$$\frac{d}{dx}(x^3y)6x^5$$

$$d(x^3y) = 6x^5dx$$

$$\int d(x^3y) = \int 6x^5dx$$

$$x^3y = x^6 + c$$

$$y(x) = x^3 + \frac{c}{x^3}$$

que é a solução da equação diferencial inicial. Vejamos um outro exemplo ilustrativo. Considere a equação diferencial

$$y^2dx + (3xy - 1)dy = 0 \tag{30}$$

que pode ser colocada na forma

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y^2}{1 - 3xy} = 0$$

que é não-linear em y. Esta equação também não é exata, sepáravel ou homogênea. No entanto, como foi dito no início deste capítulo, ao definir a equação (10), quando uma equação diferencial está na forma da equação (30), podemos interpretar que $y = y(x)$ ou que $x = x(y)$. Assim, vamos tentar esta última interpretação, ou seja, vamos escrever a equação como

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1 - 3xy}{y^2} = 0$$

ou ainda como

$$\frac{dx}{dy} + \frac{3}{y}x = \frac{1}{y^2}$$

que é do tipo

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$$

e é uma equação diferencial linear em x, podendo ser resolvida mediante a utilização da equação (29), com a substituição de x por y e y por x. O fator integrante é

$$\mu(y) = exp\left[\int P(y)dy\right]$$

$$= exp\left[\int \left(\frac{3}{y}\right) dy\right]$$

$$= exp^{3\ln|y^3|}$$

$$\mu(y) = y^3$$

Multiplicando o fator integrante pela equação diferencial, temos

$$y^3\frac{dx}{dy} + 3y^2x = y$$

como

$$\frac{d}{dy}(y^3x) = y^3\frac{dx}{dy} + x(3y^2)$$

obtemos

$$\frac{d}{dy}(y^3x) = y$$

$$d(y^3x) = ydy$$

$$\int d(y^3x) = \int ydy$$

$$y^3x = \frac{y^2}{2} + c$$

$$x(y) = \frac{1}{2y} + \frac{c}{y^3}$$

que é a solução da equação diferencial (30). Vejamos uma classe especial de equações diferenciais que podem ser transformadas em equações lineares.

2.5 Equação de Bernoulli

Definição 2.8 *Uma equação diferencial da forma*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{31}$$

é chamada de equação de Bernoulli de grau n.

Um exemplo de uma equação diferencial de Bernoulli é a equação

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x} \tag{32}$$

pois $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = -\frac{1}{x}$ e $n = 2$

Se na equação de Bernoulli tivermos $n = 0$ ou $n = 1$, então a equação é na verdade linear e pode ser resolvida mediante algum dos métodos vistos. nos outros casos, a equação diferencial é não - linear e ela pode ser resolvida através do seguinte teorema:

Teorema 2.4 *A equação de Bernoulli não-linear*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

sendo $n \neq 0$ ou 1, pode ser transformada numa equação diferencial linear atráves da mudança de variáveis

$$v = y^{1-n}$$

que resulta numa equação diferencial linear em v.

Demonstração. Primeiro, multiplicamos a equação diferencial (31) por y^{-n}, ou seja,

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \tag{33}$$

Se $v = y^{1-n}$, então,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(y^{1-n}) = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

e a equação (33) fica

$$\left(\frac{1}{1-n}\right)\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

ou, de forma equivalente,

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$$

Chamando

$$P_1(x) = (1-n)P(x) \qquad e \qquad Q_1(x) = (1-n)Q(x)$$

$$P_1(x) = (1-n)P(x) \qquad e \qquad Q_1(x) = (1-n)Q(x)$$

temos

$$\frac{dv}{dx} + P_1(x)v = Q_1(x)$$

que é linear em v.

Como exemplo, vamos resolver a equação diferencial (32), que é

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x}$$

Neste caso, $n = 2$, e então, devemos multiplicar a equação por y^{-2}, ou seja,

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{y^{-1}}{x} = -\frac{1}{x}$$

Como $v = y^{1-n} = y^{-1}$, temos

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(y^{-1}) = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

Fazendo a substituição, ficamos com

$$-\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = -\frac{1}{x}$$

ou ainda,

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = \frac{1}{x}$$

que está na forma padrão das equações diferenciais lineares, com $P(x) = \frac{1}{x}$ e $Q(x) = \frac{1}{x}$. O fator integrante é

$$\mu(x) = exp\left[\int P(x)dx\right]$$

$$= exp\left[\int \frac{dx}{x}\right]$$

$$= exp(\ln|x|)$$

$$\mu(x) = x$$

Multiplicando a equação diferencial por este fator integrante, temos

$$x\frac{dv}{dx} + v = 1$$

Como

$$\frac{d}{dx}(xv) = x\frac{dv}{dx} + v$$

obtemos

$$\frac{d}{dx}(xv) = 1$$

$$d(xv) = dx$$

$$\int d(xv) = \int dx$$

$$xv = x + c$$

$$v(x) = 1 + \frac{c}{x}$$

Lembrando que $v = y^{-1}$, temos $y = \frac{1}{v}$, ou seja,

$$\frac{1}{y(x)} = \frac{x+c}{x}$$

$$y(x) = \frac{x}{x+c}$$

que é a solução da equação diferencial de Bernoulli (32).

3 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Ordem Superior: Técnicas Fundamentais

Passaremos à discussão das equações diferencias ordinárias de ordem superior, em especial as equações diferencias de segunda ordem.

Definição 3.1 *Uma equação diferencial linear ordinária de ordem n é uma equação que pode ser posta na forma da equação (6), que é*

$$a_o(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x)$$

onde $a_0(x)$ não é identicamente nulo. Se $b(x) = 0$, a equação acima escreve-se na forma

$$a_o(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0 \tag{34}$$

e é chamada homogênea, enquanto que a equação diferencial (6) é dita não homogênea. Se $n = 2$, então a equação diferencial (6) se reduz à equação não homogênea

$$a_o(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = b(x) \tag{35}$$

enquanto que a equação diferencial homogênea (34) se reduz a

$$a_o(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0 \tag{36}$$

Como exemplo, as equações diferencias

$$\frac{d^3x}{dt^3} - t^2\frac{d^2x}{dt^2} + xt = \cos t \tag{37}$$

e

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 3x^3\frac{dy}{dx} - 4xy = e^x \tag{38}$$

são equações diferencias lineares não-homogêneas. A equação (37) é de ordem $n = 3$, ao passo que a equação (38) é de ordem $n = 2$. As equações diferenciais homogêneas correspondentes são

$$\frac{d^3x}{dt^3} - t^2\frac{d^2x}{dt^2} + 2t\frac{dx}{dt} + xt = 0$$

e

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 3x^3\frac{dy}{dx} - 4xy = 0$$

Vamos nos concentrar inicialmente no estudo da equação diferencial homogênea (34)

3.1 Equações Diferenciais Homogêneas de Ordem Superior

Apesar da aparente simplicidade, não há um modo geral de resolução da equação diferencial (34). Existem apenas casos particulares, desenvolvidos para serem usados em situações específicas. Um desses casos ocorre quando os coeficientes a_i na equação (34), que é

$$a_o(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0$$

são na verdade constantes numéricas e não funções de x. Neste caso, existe um método razoavelmente simples, que será discutido. No entanto, antes de apresentarmos o modo de resolver equações diferenciais homogêneas com coeficientes constantes, é preciso definir alguns conceitos que serão necessários depois, em particular os conceitos de dependência e independência linear.

Definição 3.2 *Dadas as funções $f_1, f_2, \ldots, f_n$, a expressão*

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n \tag{39}$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são constantes, é uma combinação linear $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Por exemplo,

$$5\ln x - 2\cos 2x + 4x^2$$

é uma combinação linear de $f_1(x) = \ln x$, $f_2(x) = \cos 2x$ e $f_3(x) = x^2$.

Definição 3.3 Seja a combinação linear de $f_1, f_2, \ldots, f_n$

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0 \tag{40}$$

Se nesta combinação linear especial pelo menos um dos c_j for diferente de zero, dizemos que as funções $f_1, f_2, \ldots, f_n$ são linearmente dependentes, ou LD. Em particualr, duas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são linearmente dependentes se, quando

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0 \tag{41}$$

pelo menos c_1 ou c_2 puder ser diferente de zero. Por exemplo, as funções $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 2x$ e $f_3(x) = 3x$ são LD, pois na combinação linear

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = 0$$

$$c_1(x) + c_2(2x) + c_3(3x) = 0$$

se tomarmos $c_1 = 3$, $c_2 = -2$ *e* $c_3 = \frac{1}{3}$, *veremos que a igualdade é satisfeita.*
Definição 3.4 *Quando o único modo de ter a combinação linear*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$$

for o de escolher $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, *as funções* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *são linearmente independentes, ou LI. Em particular, as funções* f_1 *e* f_2 *são LI se, para se ter*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

é necessário que $c_1 = c_2 = 0$. *Como exemplo, as funções* $f_1(x) = e^x$ *e* $f_2(x) = \sin x$ *são LI, pois, para que*

$$c_1 e^x + c_2 \sin x = 0$$

é preciso que $c_1 = c_2 = 0$.
Definição 3.5 *Dadas as funções* $f_1, f_2, \ldots, f_n$, *onde cada uma possui derivadas pelo menos até a ordem* $(n-1)$, *o determinante*

$$W\left(f_1, f_2, \ldots, f_n\right) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \ldots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{42}$$

é chamado Wronskiano dessas funções. Se o Wronskiano de $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ *for nulo, essas funções são LD, e se não for, elas são LI.*

Vejamos um exemplo. Vamos calcular o Wronskiano das funções dadas no exemplo da definição 4.3, que são $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 2x$ e $f_3(x) = 3x$. Temos três funçòes e precisamos achar suas derivadas até a ordem 2, ou seja,

$$f_1'(x) = 1 \qquad f_2'(x) = 2 \qquad f_3'(x) = 3$$

$$f_1''(x) = 0 \qquad f_2''(x) = 0 \qquad f_3''(x) = 0$$

Agora, calculamos o Wronskiano

$$W = (f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix}$$

$$W=(x,2x,3x)=\begin{vmatrix} x & 2x & 3x \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$W=(x,2x,3x)=0$$

e as funções são LD, como já havíamos mostrado. Vamos calcular agora o Wronskiano das funções dadas no exemplo da definição 3.4, que são LI. As funções são $f_1(x)=e^x$ e $f_2(x)=\sin x$. Suas derivadas são

$$f_1^{'}(x)=e^x \qquad f_2^{'}(x)=\cos x$$

e o Wronskiano é

$$W=(f_1,f_2)=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1^{'} & f_2^{'} \end{vmatrix}$$

$$W=(e^x,\sin x)=\begin{vmatrix} e^x & \sin x \\ e^x & \cos x \end{vmatrix}$$

$$W=(e^x,\sin x)=e^x\cos x-e^x\sin x$$

$$W=(e^x,\sin x)=e^x\left(\cos x-\sin x\right)$$

que é diferente de zero, e portanto as funções são LI.

Teorema 3.1 *A equação diferencial linear homogênea ordinária (34)*

$$a_o(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=0$$

sempre possui n soluções linearmente independentes, e a sua solução geral é, a combinação linear dessas n soluções, na forma

$$f(x)=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_nf_n(x)$$

Em particular, se $n=2$, a solução geral é

$$f(x)=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$$

Um modo de se verificar as soluções $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ são LI é calcular o seu Wronskiano. Se não for nulo, então a combinação linear das soluções é a solução geral da equação diferencial. Por exemplo, a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

pode ser resolvida se $y(x) = \cos x$ ou se $y(x) = \sin x$. O Wronskiano destas funções é

$$W = (\cos x, \sin x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$$

$$W = (\cos x, \sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$W = (\cos x, \sin x) = 1$$

que é diferente de zero, e as funções são LI. Portanto, a solução geral da equação diferencial é

$$f(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Vamos agora partir para o método de resolução de equações diferencias homogêneas com coeficientes constantes.

3.2 Equações Diferencias com Coeficientes Constantes

As equações diferenciais homogêneas com coeficientes constantes são as equações diferencias na forma

$$a_o \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \tag{43}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes reais. Esta equação pode ser transformada numa outra, através da substituição

$$y(x) = e^{mx}$$

Lembrando que

$$\frac{dy}{dx} = me^{mx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m^3e^{mx}$$

$$\vdots = \vdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m^ne^{mx}$$

a equação diferencial (43) fica

$$a_om^n + a_1m^{n-1}e^{mx} + \ldots + a_{n-1}me^{mx} + a_ne^{mx} = 0$$

ou

$$e^{mx}\Big(a_om^n + a_1m^{n-1} + \ldots + a_{n-1}m + a_n\Big) = 0$$

Como $e^{mx} \neq 0$, ficamos com

$$a_om^n + a_1m^{n-1} + \ldots + a_{n-1}m + a_n = 0 \tag{44}$$

que é um polinômio de grau n em m, chamado de equação característica da equação diferencial (43). Se $y(x) = e^{mx}$ é solução de (43), então m deve ser solução de (44), ou seja, m é uma raiz do polinômio. Como um polinômio de grau n tem n raízes, temos n valores de m, que correspondem ás n soluções da equação diferencial (43). Precisamos apenas separar os casos de raízes reais e distintas, raízes reais e repetidas e raízes complexas.

3.2.1 Raízes Reais e Distintas

Se as raízes de (44) são reais e distintas, então as soluções são

$$e^{m_1x}, e^{m_2x}, \ldots, e^{m_nx}$$

que são LI, e a solução geral é

$$y(x) = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \ldots + c_ne^{m_n} \tag{45}$$

Como exemplo, considere a equação diferencial

$$\frac{d^2(y)}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Substituindo $y(x) = e^{mx}$, temos

$$m^2 e^{mx} + 5me^{mx} + 6e^{mx} = 0$$

$$m^2 + 5m + 6 = 0$$

que é a equação característica neste caso. As raízes são

$$m_1 = -2 \qquad , m_2 = -3$$

que são diferentes, e as soluções são

$$e^{-2x} \qquad , e^{-3x}$$

que são LI e formam a solução geral

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$$

3.2.2 Raízes Reais e Repetidas

Vamos considerar a equação diferencial

$$\frac{d^2(x)}{dt^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4x = 0 \tag{46}$$

Sua equação característica é

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

que possui a raiz dupla $m = 2$. Então, as soluções seriam e^{2t} e e^{2t}. No entanto, essas soluções não são LI, como é fácil de verificar, já que elas são iguais. A função e^{2t} é uma solução, como pode ser visto se a substituirmos na equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2}(e^2 t) - 4\frac{d}{dt}(e^{2t}) + 4(e^{2t}) = 0$$

$$4e^{2t} - 8e^{2t} + 4e^{2t} = 0$$

$$0 = 0$$

mas falta mais uma, pois uma equação diferencial de ordem 2 tem duas soluções. Para achar a outra vamos tentar tomar

$$x = e^{2t} y$$

e ver se isso resolve o problema. Temos então

$$\frac{dx}{dt} = 2e^{2t} y + e^{2t} \frac{dy}{dt} = e^{2t} \left[2y + \frac{dy}{dt} \right]$$

e

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2e^{2t} \left[2y + \frac{dy}{dt} \right] + e^{2t} \left[2y + \frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \right]$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2e^{2t} \left[4y + 4\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \right]$$

substituindo tudo isso na equação (46), o resultado é

$$e^{2t} \left[4y + 4\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \right] - 4e^{2t} \left[2y + \frac{dy}{dt} \right] + 4e^{2t} y = 0$$

ou

$$4y + 4\frac{dy}{dt} + \frac{d^2}{dt^2} - 4 \left[2y + \frac{dy}{dt} \right] + 4y = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} + \frac{dy}{dt} (4 - 4) + y (4 - 8 + 4) = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = 0$$

A equação diferencial acima é bastante simples de resolver. Chamamos

$$w = \frac{dy}{dt}$$

e temos

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

$$w = c$$

onde a soma c é uma constante que pode ser tomada como sendo $c = 1$ sem perda de generalidade. Agora,

$$\frac{dy}{dt} = 1$$

$$dy = dt$$

$$y = t + d$$

em que d é outra constante, que neste caso pode ser tomada como sendo $d = 0$. O resultado é $y = t$, e a outra solução da equação diferencial (46) é

$$te^{2t}$$

que LI em relação à solução e^{2t}. A solução geral fica

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} = e^{2t}\left(c_1 + c_2 t\right)$$

O procedimento acima é absolutamente geral, e quando uma equação diferencial tem uma raiz m_i que se repete k vezes, as soluções associadas a essa raiz são

$$e^{m_i x}, xe^{m_i x}, x^2 e^{m_i x}, \ldots, x^{k-1} e^{m_i x}$$

e a solução geral fica

$$\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_k x^{k-1}\right) e^{m_i x}$$

Se houver mais de uma rais repetida, repete-se o procedimento acima para cada uma delas. Por exemplo, se uma equação diferencial tiver uma equação característica cujas raízes são $m = 1, 1, 1, -3, -3, 4$ a solução geral dessa equação diferencial será

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 x + c_3 x^2 e^{x} + c_4 e^{-3x} + c_5 x e^{-3x} + c_6 e^{4x}$$

e todas as funções acima são LI, como deveria ser.

3.2.3 Raízes Complexas

O procedimento a ser seguido quando as raízes são complexas é idêntico aos anteriores. Se as raízes complexas forem distintas, segue-se o caso das raízes distintas. Se aparecerem raízes complexas repetidas, segue-se o caso das raízes repetidas. As únicas diferenças são que, se $z = a + bi$ é raiz de uma equação, então $\bar{z} = a + bi$, que é complexo conjugado, também é raiz, ou seja, elas aparecem aos pares. A outra diferença é que, usando a relação de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

podemos expressar, dependendo da necessidade, as exponenciais complexas como soma de senos e cossenos, para facilitar a "visualização"do resultado.

Como exemplo, a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -6\frac{dy}{dx} + +25y = 0$$

tem uma equação característica dada por

$$m^2 - 6m + 25 = 0$$

que tem as raízes complexas

$$m_1 = 3 + 4i, m_2 = 3 - 4i$$

que são conjugadas, como esperado. A solução segue o caso de raízes reais e distintas, ou seja, as funções

$$e^{(3+4i)x} \qquad e^{(3-4i)x}$$

formam uma solução geral

$$y(x) = c_1e^{(3+4i)x} \qquad c_2e^{(3-4i)x}$$

que são LI, como deveria ser. Para expressar a solução na forma de senos e cossenos, é preferével transformar as soluções antes de formar a solução geral, isto é,

$$y(1) = e^{(3+4i)x} = e^{3x-4xi} = e^{3x}e^{4xi} = e^{3x}\left(\cos 4x + i\sin 4x\right)$$

$$y(2) = e^{(3+4i)x} = e^{3x-4xi} = e^{3x}e^{-4xi} = e^{3x}\left(\cos 4x - i\sin 4x\right)$$

e a solução fica

$$y(x) = k_1 y_1 + k_2 y_2$$

$$= k_1 e^{3x} (\cos 4x + i \sin 4x) + k_2 e^{3x} (\cos 4x - i \sin 4x)$$

$$= e^{3x} [(k_1 + k_2) \cos 4x + i (k_1 - k_2) \sin 4x]$$

$$y(x) = e^{3x} (c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$$

que é a solução geral, com $c_1 = k_1 + k_2$ e $c_2 = i(k_1 - k_2)$, expressa em senos e cossenos.

Já a equação diferencial

$$\frac{d^4x}{dt^4} - 4\frac{d^3x}{dt^3} + 14\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$$

tem uma equação característica

$$m^4 - 4m^3 + 14m^2 - 20m + 25 = 0$$

cujas soluções são

$$m = 1 + 2i, 1 - 2i, 1 + 2i, 1 + 2i, 1 - 2i$$

que são repetidas. Então, as soluções são

$$e^{(1+2i)t}, te^{(1+2i)t}, e^{(1-2i)t}, te^{(1-2i)t}$$

e a solução geral fica

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{(1+2i)t} + (c_3 + c_4 t)e^{(1-2i)t}$$

Na forma de senos e cossenos, temos

$$x_1 = e^{(1+2i)t} = e^{t+2it} = e^t (\cos 2t + i \sin 2t)$$

$$x_2 = te^{(1+2i)t} = te^t (\cos 2t + i \sin 2t)$$

$$x_3 = e^{(1-2i)t} = e^{t-2it} = e^t (\cos 2t - i \sin 2t)$$

$$x_4 = te^{(1-2i)t} = te^t (\cos 2t - i \sin 2t)$$

que resulta na solução geral

$$x(t) = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4$$

$$= k_1 = e^t (\cos 2t + i \sin 2t) + k_2 te^t (\cos 2t + i \sin 2t)$$

$$+k_3 e^t (\cos 2t - i \sin 2t) + k_4 te^t (\cos 2t - i \sin 2t)$$

$$= e^t \{[(k_1 + k_3) + (k_2 + k_4)\, t] \cos 2t + [i\,(k_1 - k_3) + i\,(k_2 - k_4)\, t] \sin 2t\}$$

onde $c_1 = k_1 + k_3$, $c_2 = k_2 + k_4$, $c_3 = i(k_1 - k_3)$ e $c_4 = i(k_2 - k_4)$

$$x(t) = e^t [(c_1 + c_2 t) \cos 2t + (c_3 + c_4 t) \sin 2t]$$

Agora já sabemos como resolver a equação diferencial homogênea com coeficientes constantes (43). Vamos estudar o modo de resolver a equação não-homogênea com coeficientes constantes

$$a_o(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \qquad (47)$$

Para isso, vamos precisar do seguinte teorema, válido para qualquer equação diferencial na forma (6):

Teorema 3.2 *A solução geral da equação diferencial não-homogênea*

$$a_o(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x) y = b(x)$$

é dada por

$$y = yh + yp$$

onde y_h é a solução da equação diferencial homogênea correspondente

$$a_o(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x) y = 0$$

e y_p é uma solução particular, sem constantes arbitrárias, da equação diferencial não-homogênea acima.

Demonstração Vamos apresentar a demonstração do teorema acima para o caso em que $n = 2$,mas a idéia é geral. Neste caso, a equação diferencial não-homogênea é

$$a_o(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = b(x)$$

O teorema diz que a solução geral da equação acima é

$$y = y_h + y_p$$

sendo que y_h é a solução da homogênea correspondente, ou seja,

$$a_o(x)\frac{d^2y_h}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy_h}{dx} + a_2(x)y_h = 0 \qquad (48)$$

Vamos aplicar a solução acima na equação diferencial

$$a_o(x)\frac{d}{dx^2}(y_h + y_p) + a_1(x)\frac{d}{dx}(y_h + y_p) + a_2(x)(y_h + y_p) = b(x)$$

$$a_o(x)\frac{d^2y_h}{dx^2} + a_0(x)\frac{d^2y_p}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy_h}{dx} + a_1(x)\frac{dy_p}{dx} + a_2(x)y_h + a_2(x)y_p = b(x)$$

$$\left[a_o(x)\frac{d^2y_h}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy_h}{dx}a_2(x)y_h\right] + \left[a_0(x)\frac{d^2y_p}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy_p}{dx} + +a_2(x)y_p\right] = b(x)$$

O primeiro termo entre colchetes é nulo, como mostra a equação (48). Assim,

$$a_o(x)\frac{d^2y_p}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy_p}{dx} + a_2(x)y_p = b(x)$$

que é uma igualdade, pois, por hipótese, y_p é uma solução particular da equação diferencial não-homogênea.

Como exemplo, a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x$$

tem uma equação homogênea associada cuja solução, como já vimos, é dada por

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Uma solução particular desta equação diferencial é

$$y_p = x$$

e a solução geral da equação é

$$y(x) = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Este teorema é geral e vale inclusive para o caso de coeficientes constantes. Então, para resolver a equação diferencial com coeficientes constantes (47), podemos resolver a homogênea correspondente pelo método já visto, que fornece a solução y_h, e somá-la com a solução particular y_p. Mas como se acha a solução particular? Existem dois métodos, que serão discutidos em seguida.

3.3 Método dos Coeficientes a Determinar

Agora queremos achar soluções particulares ds equação diferencial (47)

$$a_o \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = b(x)$$

Um dos métodos para encontrar y_p é dos coeficientes a determinar. Esse método funciona para poucos casos específicos, ou seja, para uma classe pequena de funções $b(x)$. No entanto, por sorte, a maioria das funções relevantes do ponto de vista físico está incluída neste conjunto, o que faz com que esse método seja muito importante para físicos. Além disso, o método é muito simples, muito mais do que o outro, chamado de variação dos parâmetros, que serve para quase todas as funções $b(x)$ mas é mais complicado. Para apresentar o método, vamos considerar um caso específico, para a equação diferencial abaixo:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{4x} \qquad (49)$$

Como é que achamos uma solução particular? Ela deve ser tal que, após realizarmos as derivadas e as simplificações, devemos obter $2e^{4x}$. Poderíamos tentar, lembrando do método de resolução da equação diferencial homogênea, uma solução do tipo exponencial, e já que o resultado deve ser $2e^{4x}$, uma exponencial do tipo

$$y_p = Ae^{4x}$$

onde A é um coeficiente a ser determinado (por isso o nome do método). Vamos aplicar a solução tentativa na euqação (49)

$$\frac{dy_p}{dx} = 4Ae^{4x} = 4y_p$$

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} = 16Ae^{4x} = 16y_p$$

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y_p = 16y_p - 2(4y_p) - 3y_p$$

$$2e^{4x} = 5y_p$$

$$2e^{4x} = 5Ae^{4x}$$

$$5A = 2$$

$$A = \frac{2}{5}$$

Assim a solução particular

$$y_p = \frac{2}{5}e^{4x}$$

resolve a equação diferencial (49).

Agora considere a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{3x} \tag{50}$$

que é idêntica à anterior, apenas com $b(x)$ diferente. Já que tivemos sucesso no caso anterior, vamos supor também que

$$y_p = Ae^{3x}$$

seja uma solução particular. Para determinar A, fazemos

$$\frac{dy_p}{dx} = 3Ae^{3x} = 3y_p$$

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} = 9Ae^{3x} =$$

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 9y_p - 2(3y_p) - 3y_p$$

$$2e^{3x} = 0$$

$$e^{3x} = 0$$

e temos um grande problema. A equação que resulta da suposição acima é impossível, e a suposição é falsa, ou seja, aquele y_p não é a solução da equação diferencial (50). E agora? Por que duas equações diferenciais que têm a mesma equação homogênea associada, que é

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \tag{51}$$

para um caso têm uma solução particular semelhante ao termo $b(x)$ da equação não-homogênea e para o outro isto não acontece? Vamos resolver a equação diferencial homogênea 4.18 para ver se a solução esclarece nosssas dúvidas. A equação característica da equação diferencial (51) é

$$m^2 - 2m - 3 = 0$$

cujas raízes são

$$m_1 = 3$$

$$m_2 = -1$$

que formam as soluções

$$e^{3x}$$

$$e^{-x}$$

as quais,por sua vez, formam a solução da homogênea

$$y_h = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}$$

Agora parece que temos uma luz sobre o problema. Na solução da homogênea aparece a função e^{3x}. Portanto, como a solução geral da equação diferencial (50) deve ser formada por funções LI, na solução particular y_p não podem aparecer as mesmas funções que fazem a solução homogênea, pois o conjunto das funções não seria LI, e sim, LD. Na equação (49), o conjunto de funções é $\{e^{3x}, e^{-x}, e^{4x}\}$, que é LI. Na equação (50), ele seria $\{e^{3x}, e^{-x}, e^{3x}\}$, que é claramente LD, e portanto, não é permitido. Por causa disso, é necessário sempre obter a solução da homogênea associada para eliminar as funções indesejadas.

E como resolvemos então a euqação (50)? Lembrando o que ocorre quando temos raízes repetidas, podemos tentar supor a solução particular

$$y_p = Axe^{3x}$$

para ver se funciona, já que, aparentemente, $m = 3$ é uma raiz repetida. Então,

$$\frac{dy_p}{dx} = 3Axe^{3x} = Ae^{3x}(3x+1)$$

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} = 9Axe^{3x} + 6Ae^{3x} = Ae^{3x}(9x+6)$$

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y_p = Ae^{3x}(9x+6) - 2Ae^{3x}(3x+1) - 3Ax^{3x}$$

$$2e^{3x} = Ae^{3x}\left[9x + 6 - 6x - 2 - 3x\right]$$

$$2e^{3x} = 4Ae^{3x}$$

$$A = \frac{2}{4}$$

$$A = \frac{1}{2}$$

e agora chegamos a solução aceitável, dada por

$$y_p = \frac{1}{2}xe^{3x}$$

e a solução geral da equação diferencial (50) é

$$y(x) = y_h + y_p = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^{3x}$$

Entendido este exemplo, vamos agora ao método propriamente dito, estabelecendo algumas definições necessárias.

Definição 3.6 *Uma função CD (Coeficientes a Determinar) é uma função que se enquadra nos seguintes casos:*

1. x^n *, onde* n *é um inteiro positivo ou nulo*

2. e^{ax}*, onde* $a \neq 0$

3. $\sin(bx + c)$*, onde* b *e* c *são constantes, com* $b \neq 0$

4. $\cos(bx + c)$ *onde* b *e* c *são constantes, com* $b \neq 0$

ou ainda, a soma ou um produto de duas ou mais das funções acima (não uma divisão)

Vejamos alguns exemplos. As funções

$$e^{3x} \qquad x^7 \qquad \sin(4x - 3) \qquad \cos \frac{1}{2} x$$

são exemplos de funções CD. Os produtos

$$x^7 e^{3x} \qquad \sin(4x - 3) \cos \frac{1}{2} x \qquad x^7 \cos \frac{1}{2} x$$

são também funções CD.

Definição 3.7 *C*onsidere uma função f CD. O conjunto LI formado por f e por suas derivadas sucessivas, desconsiderando constantes multiplicativas, é chamado conjunto CD de f, e é representado por S.

Por exemplo se

$$f(x) = x^2$$

temos

$$f^{'}(x) = 2x \qquad f^{''}(x) = 2 \qquad f^{n}(x) = 0, n \geq 3$$

e o conjunto CD de $f(x)$ é

$$S = x^2, x, 1$$

pois desconsideramos as constantes multiplicativas. Vejamos outro exemplo. Se

$$f(x) = \cos 2x$$

temos

$$f^{'}(x) = -2\sin 2x \qquad f^{''}(x) = -4\cos 2x \qquad f^{'''}(x) = 8\sin 2x$$

Após a derivada segunda, as funões começam a se repetir. O único conjunto LI é

$$S = \cos 2x, \sin 2x$$

Agora vamos ao método dos coeficientes a determinar. Considere a equação diferencial não-homogênea com coeficientes constantes (47)

$$a_o \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = b(x)$$

onde $b(x)$ é uma combinação linear

$$b(x) = A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_n u_n$$

das funções u_i, que são todas CD, com coeficientes A_i. Assumindo que a solução da homogênea y_h associada já foi obtida, a solução particular y_p é encontrada mediante os seguintes passos:

1. Para cada uma das funções CD

$$u_i, u_2, \ldots, u_n$$

ache o respectivo conjunto CD

$$S_1, S_2, \ldots, S_n$$

2. Depois de otidos os conjuntos CD, suponha que um deles, por exemplo S_i, esteja contido totalmente em outro, S_j. Então, desonsidere o S_i, ou seja, fique apenas com os conjuntos mais abrangentes.

3. Compare os conjuntos S restantes com a solução da equação diferencial homogênea y_h. Se algum dos conjuntos, digamos S_k, tiver um ou mais elementos que pertencem à solução y_h, então multiplique cada um dos elementos S_k pela menor potência de x que faça com que o novo conjunto S_k não tenha mais nenhum elemento que componha a solução y_h. Repita essa verificação com cada um dos conjuntos CD, um de cada vez.

Vejamos alguns exemplos passo-a-passo. Considere a equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2 e^x$$

A função x^2e^x é CD, e seu conjunto é

$$S = \left\{x^2e^x, xe^x, e^x\right\}$$

A equação característica da homogênea associada é

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

que tem as raízes $m_1em_2 = 1$, e a solução da homogênea é, por causa das raízes repetidas,

$$y_h = c_1e^x + c_2xe^x$$

Portanto, temos que passar pelo passo 3 do esquema acima, pois em S existem dois elementos que aparecem em y_h, que são e^xexe^x. Para resolver esta parte, multiplicamos cada elemento se S por x^2, já que multiplicá-lo apenas por x não adiantaria. O novo conjunto $S^{'}$ é

$$S^{'} = \left\{x^4e^x, x^3e^x, x^2e^x\right\}$$

Agora precisamos fazer a combinação linear

$$y_p = Ax^4e^x + Bx^3e^x + Cx^2e^x$$

e substituir esta equação na equação diferencial para achar as constantes A, B e C. Neste caso temos

$$\frac{dy_p}{dx} = Ae^x\left(x^4 + 4x^3\right)$$

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} = +Be^x\left(x^3 + 6x^2 + 6x\right) + Ce^x\left(x^2 + 4x + 2\right)$$

Reunindo as expressões acima na equação diferencial, obtemos

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} - \frac{dy_p}{dx} + y_p = x^2e^x$$

$$x^2e^x = Ae^x\left(x^4 + 8x^3 + 12x^2\right) + Be^x\left(x^3 + 6x^2 + 6x\right) + Ce^x\left(x^2 + 4x + 2\right)$$
$$-2\left[Ae^x\left(x^4 + 4x^3\right) + Be^x\left(x^3 + 3x^2\right) + Ce^x\left(x^2 + 2x\right)\right] + Ax^4e^x + Bx^3e^x + Cx^2e^x$$

ou

$$x^2e^x = e^x\left[x^4(A-2A+A)+x^3(8A+B-9A-2B+B)+x^2(12A+6B+C-6B-2C+C)\right.$$

ou ainda

$$x^2e^x = e^x\left[12Ax^2+6Bx+2C\right]$$

Os polinômios devem ser iguais, logo,

$$12A = 1$$

$$A = \frac{1}{12}$$

$$B = 0, \qquad C = 0$$

e a solução particular fica

$$y_p = \frac{1}{12}x^4e^x$$

que, somando a solução da homogênea, fornece a solução geral

$$y(x) = y_h + y_p = y_h = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{12}x^4e^x$$

Vejamos mais um exemplo. A solução da homogênea associada à equação diferencial

$$\frac{d^4}{dt^4} + \frac{d^2x}{dt^2} = 3t^2 + 4\sin t - 2\cos t$$

é dada por

$$x_h = c_1 + c_2t + c_3\sin + c_4\cos t$$

O termo não-homogêneo é $b(t) = 3t^2 + 4\sin t - 2\cos t$, que é formado pela combinação linear das funções CD

$$t^2 \qquad \sin t \qquad \cos t$$

Os conjuntos CD destas funções são

$$S_1 = \left\{t^2, t, 1\right\} \qquad S_2 = \{\sin t, \cos t\}, \qquad S_3 = \{\cos t, \sin t\}$$

Agora, considerando o passo 2, vemos que os conjuntos S_2 e S_3 são idênticos, e então desconsideramos um deles (S_3) e ficamos com

$$S_1 = \left\{t^2, t, 1\right\} \qquad S_2 = \{\sin t, \cos t\}$$

A solução da homogênea tem as seguintes funções:

$$t \qquad 1 \qquad \sin t \qquad \cos t$$

e torna-se necessário que passemos pelo item 3. Cosiderando S_1, vemos que t e 1 aparecem na homogênea. Portanto, precisamos multiplicar os elementos de S_1 por t^2, e o novo $S_1^{'}$ será

$$S_1^{'} = \left\{t^4, t^3, t^2\right\}$$

Quando a S_2, também temos que corrigi-lo, pois funções que estão na solução da homogênea. Neste caso, basta multiplicar os elementos de S_2 por t, e o novo $S_2^{'}$ será

$$S_2^{'} = \{t\sin t, t\cos t\}$$

Agora formamos a solução particular

$$x_p = At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt\sin t + Et\cos t$$

e precisamos colocá-la na equação diferencial para achar A, B, C, D e E. Calculando a derivada primeira, temos

$$\frac{dx_p}{dt} = 4At^3 + 3Bt^2 + 2Ct + D\sin t + Dt\cos t + E\cos t - Et\sin t$$

A derivada segunda é

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} = 12At^2+6Bt+2C+D\cos t+D\cos t-Dt\sin t-E\sin t-E\sin t-Et\cos t$$

ou

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} = 12At^2 + 6Bt + 2C + 2D\cos t - Dt\sin t - 2E\sin t - Et\cos t$$

A derivada terceira fica

$$\frac{d^3x_p}{dt^3} = 24At + 6B - 2D\sin t - D\sin t - Dt\cos t - 2E\cos t - E\cos t + Et\sin t$$

ou

$$\frac{d^3x_p}{dt^3} = 24At + 6B - 3D\sin t - Dt\cos t - 3E\cos t + Et\sin t$$

E, finalmente, a derivada quarta é

$$\frac{d^4x_p}{dt^4} = 24A - 3D\cos t - D\cos t + Dt\sin t + 3E\sin t - E\sin t + Et\cos t$$

$$\frac{d^4x_p}{dt^4} = 24A - 4D\cos t + Dt\sin t + 4E\sin t + Et\cos t$$

Substituindo todas essas expressões na equação diferencial, temos

$$\frac{d^4x}{dt^4} + \frac{d^2x}{dt^2} = 3t^2 + 4\sin t - 2\cos t$$

ou

$$3t^2 + 4\sin t - 2\cos t = 24A - 4D\cos t + Dt\sin t + 4E\sin t +$$
$$Et\cos t + 12At^2 + 6Bt + 2C + 2D\cos t - Dt\sin t - 2E\sin t - Et\cos t$$

ou ainda,

$$3t^2 + 4\sin t - 2\cos t = 12At^2 + 6Bt + (2C + 24A) + (-4D + 2D)\cos t +$$
$$(E - E)\,t\cos t + (4E - 2E)\sin t + (D - D)\,t\sin t$$

e, por fim,

$$3t^2 + 4\sin t - 2\cos t = 12At^2 + 6Bt + (2C + 24A) - 2D\cos t + 2E\sin t$$

$$3t^2 + 4\sin t - 2\cos t = 12At^2 = 12At^2 + 6Bt + (2C + 24A) - 2D\cos t + 2E\sin t$$

e os coeficientes são dados por

$$B = 0$$

$$12A = 3 \qquad A = \frac{1}{4}$$

$$2C + 24A = 0$$

$$C = -12\frac{1}{4} = -3$$

$$-2D = -2$$

$$D = 1$$

$$2E = 4$$

$$E = 2$$

A solução particular fica

$$x_p = \frac{1}{4}t^4 - 3t^3 + t\sin t + 2t\cos t$$

que, combinada com a solução da homogênea x_h, resulta na solução geral

$$x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \sin t + c_4 \cos t + \frac{1}{4}t^4 - 3t^3 + t\sin t + 2t\cos t$$

Vamos agora ao outro método de obtenção de soluções particulares.

3.4 Método da Variação dos Parâmetros

Embora o método dos coeficientes a determinar seja muito simples, ele só funciona para as funções $b(x)$ que sejam CD. Para a equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x$$

este método já não funciona, porque $b(x) = \tan x$ não é uma função CD. Para resolver esta equação, precisamos do método da variação dos parâmetros, que pode ser utilizado para achar soluções particulares de equações diferenciais com coeficientes constantes ou não. Vamos demonstrar o método para a equação diferencial não-homogênea de ordem 2

$$a_o(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = b(x) \tag{52}$$

mas a idéia é absolutamente geral e pode ser aplicada para qualquer equação diferencial. A única condição de aplicação do método de variação dos parâmetros é que a solução homogênea associada à equação diferencial seja conhecida, ou seja, precisamos conhecer y_h a priori, e com isso encontraremos y_p. Se a equação diferencial tiver coeficientes constantes, a solução da homogênea é simples, como já foi visto. Se não, temos que usar algum outro método para achar y_h, e se isso não for possível, não poderemos usar a variação dos parâmetros. Vamos supor que conhecemos y_h neste caso, que é dada por

$$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

lembrando sempre que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são LI. O método da variação dos parâmetros consiste em substituir as constantes c_1 e c_2 pelas funções $v_1(x)$ e $v_2(x)$, para formar uma solução particular na forma

$$y_p = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$$

que seja solução da equação diferencial não-homogênea. Como $v_1(x)$ e $v_2(x)$ esta à nossa disposição, constituem parâmetros que podem ser modificados. Daí o nome do método. Além disso, temos duas "incógnitas" $(v_1(x)ev_2(x))$ e apenas uma equação, que é a equação diferencial (52). Podemos então considerar outra equação, desde que ela não viole a primeira.

Vamos calcular as linhas que representam as derivadas

$$\frac{dy_p}{dx} = v_1(x)y_1^{'}(x) + v_1^{'}(x)y_1(x) + v_2(x)y_2^{'}(x) + v_2^{'}(x)y_2(x)$$

Agora impomos a outra equação, de modo a simplificar a derivada acima. Esta condição é

$$v_1^{'}(x)y_1(x) + v_2^{'}(x)y_2(x) = 0$$

Com ela, a derivada fica

$$\frac{dy_p}{dx} = v_1(x)y_1^{'}(x) + v_2(x)y_2^{'}(x)$$

e a derivada segunda fica

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} = v_1(x)y_1^{'}(x) + v_1^{'}(x)y_1^{'}(x) + v_2(x)y_2^{'}(x) + v_2^{'}(x)y_2^{'}(x)$$

Reunindo todas as expressões acima na equação (52), temos

$$a_o(x)\frac{d^2y_p}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy_p}{dx} + a_2(x)y_p = b(x)$$

ou

$$\begin{aligned} a_0(x)\left[v_1(x)y_1'(x) + v_1'(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2''(x) + v_2'(x)y_2'(x)\right] + \\ a_1(x)\left[v_1(x)y_1'(x) + v_2(x)y_2'(x) + v_2'(x)y_2'(x)\right] + a_2(x)\left[v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)\right] = b(x) \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} v_1\left[a_0(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x)\right] + v_2\left[a_0(x)y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x)\right] + \\ a_0(x)\left[v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x)\right] = b(x) \end{aligned}$$

Como $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da homogênea, os dois primeiros colchetes da ultima expressão acima são nulos, e resta

$$v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)}$$

E então temos duas equações para as duas incognitas, $v_1(x)$ e $v_2(x)$. Estas equações são

$$v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) = 0$$

$$v_1'(x)y_1'(x) + v_2'(x)y_2'(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)}$$

Que formam um sistema de equações que pode ser representado por um produto de matrizes

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b(x)}{a_0(x)} \end{pmatrix}$$

Lembrando que o Wronskiano de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ é dado por

$$W\left(y_1(x), y_2(x)\right) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

a resolução deste sistema de equações é dado por

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \frac{b(x)}{a_0(x)} & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = -\frac{b(x)y_2(x)}{a_0(x)W\left[y_1(x), y_2(x)\right]}$$

e

$$v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \frac{b(x)}{a_0(x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = -\frac{b(x)y_1(x)}{a_0(x)W\left[y_1(x), y_2(x)\right]}$$

Agora achamos as funções $1v_1(x)$ e $v_2(x)$, pois

$$v_1(x) = \int^x v_1'(t)dt = -\int^x \frac{b(t)y_2(t)}{a_0(t)W\left[y_1(t), y_2(t)\right]}dt \tag{53}$$

e

$$v_2(x) = \int^x v_2'(t)dt = \int^x \frac{b(t)y_1(t)}{a_0(t)W\left[y_1(t), y_2(t)\right]}dt$$

Como exemplo, vamos resolver a equação diferencial do ínicio dessa seção, ou seja,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = tgx$$

Esta equação tem uma homogênea associada cuja solução é

$$y_h = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

Portanto, vamos assumir uma solução particular na forma

$$y_p = v_1(x) \sin x + v_2(x) \cos x$$

Calculamos

$$\frac{dy_p}{dx} = v_1(x)cosx + v_1'(x)\sin(x) + v_2'(x)\cos x$$

e impomos que

$$v_1'(x)\sin x + v_2'(x)\cos x = 0$$

de mmodo que

$$\frac{dy_p}{dx} = v_1(x)\cos x - v_2(x)\sin x$$

Derivando-a mais de uam vez, obtemos

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} = -v_1(x)\sin\ +v_1^{'}(x)\cos x - v_2(x)\cos x - v_2(x)^{'}\sin x$$

e, voltando à equação diferencial, temos

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} + y_p = tgx$$

ou

$$\begin{aligned} -v_1(x)\sin x + v_1^{'}(x)\cos x - v_2(x)\cos x - v_2^{'}(x)\sin x \\ +v_1(x)\sin x + v_2(x)\cos x = tgx \end{aligned}$$

ou ainda,

$$v_1^{'}(x)\cos x - v_2^{'}\sin x = tgx$$

O sistema de equações é

$$v_1^{'}(x)\sin x + v_2^{'}(x)\cos x = u$$

$$v_1^{'}(x)\cos x - v_2^{'}(x)\sin x = tgx$$

O Wronskiano fica

$$W(\sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

e temos

$$v_1^{'}(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \tan x & -\sin x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}} = -\frac{\cos x \tan x}{-1} = \sin x$$

e

$$v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \tan x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}} = \frac{\sin x \tan x}{-1} = -\sin x tgx = \cos x - \sec x$$

Devemos agora integrar os resultados acima para encontrar $v_1(x)$ e $v_2(x)$.

$$v_1(x) = \int^x \sin t dt = -\cos x + c_3$$

$$v_2(x) = \int^x (\cos t - \sec t) dt = \sin x - \ln(\sec x + \tan x) + c_4$$

Voltando à expressão de y_p, temos

$$y_p = v_1(x) \sin x + v_2(x) \cos x$$

$$= (-\cos x + c_3) \sin x + [\sin x - \ln(\sec x + \tan x) + c_4] \cos x$$

$$= -\cos x \sin x + c_3 \sin x + \sin x \cos x - \cos x \ln(\sec x + \tan x) + c_4 \cos x$$

$$y_p = c_3 \sin x + c_4 \cos x - \cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

e a solução geral fica

$$y(x) = y_h + y_p$$

$$= c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + c_4 \cos x - \cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

$$(c_1 + c_3) \sin x + (c_2 + c_4) \cos x - \cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \cos x \ln(\sec x + \tan x)$$

Vejamos mais um exemplo. Seja a equação diferencial

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = e^x$$

A solução da homogênea é dada por

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

e então consideramos uma solução particular na forma

$$y_p = v_1(x) e^x + v_2(x) e^{2x} + v_3(x) e^{3x}$$

Como temos três incógnitas, vamos precisar de duas condições auxiliares, já que a terceira equação é a própria equação diferencial. Vamos calcular

$$\frac{dy_p}{dx} = v_1(x)e^x + v_1'(x)e^x + 2v_2(x)e^{2x} + v_2' e^{2x} + 3v_3(x)e^{3x} + v_3'(x)e^{3x}$$

Aqui impomos a primeira condição. Queremos retirar as derivadas dos $v(x)$, e então a primeira condição é

$$v_1'(x)e^x + v_2'(x)e^{2x} + v_3'(x)e^{3x} = 0$$

Com esta condição a derivada fica

$$\frac{dy_p}{dx} = v_1(x)e^x + 2v_2(x)e^{2x} + 3v_3(x)e^{3x}$$

A derivada segunda resulta em

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} = v_1(x)e^x + v_1'(x)e^x + 4v_2(x)e^{2x} + 2v_2'(x)e^{2x} + 9v_3(x)e^{3x} + 3v_3'(x)e^{3x}$$

e novamente queremos eliminar as derivadas de $v(x)$. A segunda condição fica

$$v_1'(x)e^x + 2v_2'(x)e^{2x} + 3v_3'(x)e^{3x} = 0$$

que reduz a derivada segunda a

$$\frac{d^2y_p}{dx^2} = v_1(x)e^x + 4v_2(x)e^{2x} + 9v_3(x)e^{3x}$$

A derivada terceira é

$$\frac{d^3y_p}{dx^3} = v_1(x)e^x + v_1'(x)e^x + 8v_2(x)e^{2x} + 4v_2'(x)e^{2x} + 27v_3(x)e^{3x} + 9v_3'(x)e^{3x}$$

e agora substituimos as derivadas na equação diferencial inicial

$$\frac{d^3y_p}{dx^3} - 6\frac{d^2y_p}{dx^2} + 11\frac{dy_p}{dx} - 6y_p = e^x$$

ou

$$\begin{aligned} v_1(x)e^x + 8v_2(x)e^{2x} + 27v_3(x)e^{3x} + v_1^{'}(x)e^x + 4v_2^{'}(x)e^{2x} \\ +9v_3^{'}(x)e^{3x} - 6\left[v_1(x)e^x + 4v_2(x)e^{2x} + 9v_3(x)e^{3x}\right] \\ +11\left[v_1(x)e^x + 2v_2(x)e^{2x} + 3v_3(x)e^{3x}\right] \\ -6\left[v_1(x)e^x + v_2(x)e^{2x} + v_3(x)e^{3x}\right] = e^x \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} v_1(x)e^x(1-6+11-6) + v_2(x)e^{2x}(8-24+22-6) + v_3(x)e^{3x}(27-54+33-6) \\ +v_1^{'}(x)e^x + 4v_2^{'}(x)e^{2x} + 9v_3^{'}(x)e^{3x} = e^x \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$v_1^{'}(x)e^x + 4v_2^{'}(x)e^{2x} + 9v_3^{'}(x)e^{3x} = e^x$$

Temos então o sistema de equações

$$v_1^{'}(x)e^x + v_2^{'}(x)e^{2x} + v_3^{'}(x)e^{3x} = 0$$

$$v_1^{'}(x)e^x + 2v_2^{'}(x)e^{2x} + 3v_3^{'}(x)e^{3x} = 0$$

$$v_1^{'}(x)e^x + 4v_2^{'}(x)e^{2x} + 9v_3^{'}(x)e^{3x} = e^x$$

e as incógnitas são

$$v_1^{'}(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} & e^{3x} \\ 0 & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

$$v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 & e^{3x} \\ e^x & 0 & 3e^{3x} \\ e^x & e^x & 9e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}} = -e^{-x}$$

e

$$v_3'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & 0 \\ e^x & 2e^{2x} & 0 \\ e^x & 4e^{2x} & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}e^{-2x}$$

Agora, achamos as funções $v(x)$, através de

$$v_1(x) = \int^x v_1'(t)dt = \int^x \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}x + c_4$$

$$v_2(x) = \int^x v_2'(t)dt = \int^x -e^{-t}dt = e^{-x} + c_5$$

$$v_3(x) = \int^x v_3'(t)dt = \int^x \frac{1}{2}e^{-2t}dt = -\frac{1}{4}e^{-2x} + c_6$$

Podemos desconsiderar as constantes, uma vez que elas serão incorporadas nas constantes da solução homogênea. A solução particular é

$$y_p = \frac{1}{2}xe^x + e^{-x}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}e^{3x} = \frac{1}{2}xe^x + \frac{3}{4}e^x$$

e a solução geral é

$$y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} - \frac{1}{2}xe^x + \frac{3}{4}e^x$$

ou ainda,

$$y = c_1'e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} - \frac{1}{2}xe^x$$

como $c_1' = c_1 + \frac{3}{4}$.

Embora o método tenha aqui sido demonstrado para equações diferenciais de segunda e terceira ordem, ele é geral, e o procedimento é o mesmo.

3.5 Equações de Cauchy-Euler

Definição 3.8 *A equação diferencial*

$$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=b(x) \qquad (54)$$

é chamada equação de Cauchy-Euler. Note que a caracterizam os termos

$$x^k\frac{d^ky}{dx^k}$$

que nela aparecem multiplicados por constantes a_k.

Como exemplo, a equação

$$2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+4y$$

é uma equação diferencial de Cauchy-Euler.

Embora a equação de Cauchy-Euler seja uma equação com coeficientes variáveis, ela é um dos casos em que existe um modo de resolução para a obtenção de sua solução. Esse modo é estabelecido pelo sguinte teorema:

Teorema 3.3 *A transformação* $x=e^t$ *, se* $x>0$*, resuz a equação de Cauchy-Euler (55)*

$$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=b(x)$$

a uma equação diferencial linear com coeficientes constantes. Quando $x>0$*, a substituição correta é* $x=-e^t$.

Demosntração Vamos demonstrar o teorema para o caso da equação de Cauchy-Euler de segunda ordem, que é

$$a_0x^2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1x\frac{dy}{dx}+a_2y=b(x) \qquad (55)$$

Supondo que $x>0$, temos $x=e^t$ ou $t=lnx$. Então,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right]=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dt}\right]-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{1}{x}\frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dt}\right]-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]$$

Substituindo estas duas expressões em (56), ficamos com

$$a_0x^2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1x\frac{dy}{dx}+a_2y=b(x)$$

$$a_0x^2\frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]+a_1x\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}+a_2y=b(e^t)$$

$$a_0\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]+a_1\frac{dy}{dt}+a_2y=b(e^t)$$

$$a_0\frac{d^2y}{dt^2}-a_0\frac{dy}{dt}+a_1\frac{dy}{dt}+a_2y=b(e^t)$$

$$a_0\frac{d^2y}{dt^2}+(a_1-a_0)\frac{dy}{dt}+a_2y=b(e^t)$$

$$A_0\frac{d^2y}{dt^2}+A_1\frac{dy}{dt}A_2y=B(t)$$

que é uma equação diferencial com coeficientes constantes, onde $A_0=a_0$, $A_1=a_1-a_0$, $A_2=a_2$ e $B(t)=b(e^t)$
Como exemplo, consideremos a equação diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+4y=x$$

Supondo $x>0$, fazemos $x=e^t$, e

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]$$

Substituindo estas expressões na equação, achamos

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+4y=x$$

ou

$$x^2\frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dx}\right]-3x\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}+4y=e^t$$

$$\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dx}\right]-3\frac{dy}{dt}+4y=e^t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dx}-3\frac{dy}{dt}+4y=e^t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=e^t$$

que é uma equação com coeficientes constantes que pode ser resolvida através dos métodos estudados. A homogênea é

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=e^t$$

que tem uma equação característica

$$m^2-4m+4=0$$

cujas raízes são $m_1 = 2$, $m_2 = 2$, que são repetidas. Então, a solução da homogênea é

$$y_h = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$$

e a solução particular pode ser obtida pelo método dos coeficientes a determinar, pois $b(t) = e^t$ é uma função CD. O seu conjunto CD é

$$S = e^t$$

que não contém nenhuma função que aparece na homogênea. Portanto, a solução particular tem a forma

$$y_p = Ae^t$$

e

$$\frac{dy_p}{dt} = Ae^t$$

$$\frac{d^2y_p}{dt^2} = Ae^t$$

que, substituindas na equação diferencial, resultam em

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = e^t$$

$$Ae^t - 4Ae^t + 4Ae^t = e^t$$

$$Ae^t = e^t$$

$$A = 1$$

Assim, a solução particular fica

$$y_p = e^t$$

e a solução geral é

$$y(t) = y_h + y_p = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + e^t$$

Agora retornamos à variável x, pois $x = e^t$. Assim,

$$y(x) = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x + x$$

4 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Ordem Superior: Técnicas Avançadas

4.1 Alguns Conceitos Fundamentais de Séries

Definição 4.1 *Uma série ou sequência é um conjunto de elementos dispostos numa certa ordem, que é importante. Dois conjuntos de mesmos elementos dispostos de forma diferente dão origem a duas séries distintas.*

Como exemplo, os elementos

domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado

formam uma série que conhecemos como uma semana. Já os elementos *segunda, sexta, quinta, sábado, quarta, terça, domingo* são uma série, mas não uma semana.

O nosso interesse principal está em séries entendidas do ponto de vista matemático. Neste caso, teremos:

Definição 4.2 *Quando os elementos de uma série são números, temos uma série númerica. Uma série numérica é representada por*

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_f} a_n \tag{56}$$

onde os a_n são os elementos da série (que podem ser funções de n) e n é um número inteiro, chamado índice da série, que varia desde n_0 até n_f, também inteiros. A forma explícita de a_n é chamada de lei de formação da série.

Como exemplo, a série

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

pode ser representada por

$$\sum_{n=1}^{n=7} n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

Aqui, os elementos a_n são dados por $a_n = n$, e n inicia valendo $n = 1$, passa por $n = 2, 3, 4, 5, 6$ e termina em $n = 7$, o que reproduz a série inicial. A lei de formação desta série é

$$a_n = n$$

A série

$$1, 4, 9, 16, 25$$

é representada por

$$\sum_{n=1}^{n=5} n^2 = 1, 4, 9, 16, 25$$

e neste caso, temos $a_n = n^2$. A lei de formação da série é

$$a_n = n^2$$

A série

$$1, -2, 3, -4, 5, -6$$

tem uma lei de formação

$$a_n = (-1)^{n-1}n$$

e ele fica

$$\sum_{n=1}^{n=6}(-1)^{n-1}n = 1, -2, 3, -4, 5, -6$$

Definição 4.3 *Quando os elementos de uma série são potências de variáveis, temos uma série de potências. Neste caso, a série é representada por*

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_f} a_n x^n = \sum_{n=n_0}^{n=n_f} b_n$$

onde a_n *e* b_n *também possui uma lei de formação. Aqui consideramos apenas uma variável* (x)*, mas a série pode ter mais de uma.*

Por exemplo, a série de potências em x

$$x, 2x^2, 3x^3, 4x^4$$

é representada por

$$\sum_{n=1}^{n=4} nx^n = x, 2x^2, 3x^3, 4x^4$$

e a lei de formação é

$$a_n = n, \qquad b_n = nx^n$$

A série de potências em t

$$1, t^2, t^4, -t^6, t^8$$

tem a representação

$$\sum_{n=0}^{n=4}(-1)^n t^{2n} = 1, -t^2, t^4, -t^6, t^8$$

e a lei de formação é

$$a_n = (-1)^n, \qquad b_n = (-1)^n x^{2n}$$

Definição 4.4 *A soma de uma série é a soma dos elementos desta série. Ela é representada por*

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_f} a_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_{n_f}$$

se for uma série numérica, e por

$$\sum_{n=n_0}^{n=n_f} a_n x^n = a_{n_0} x^{n_0} + a_{n_0+1} x^{n_0+1} + \ldots + a_{n_f} x^{n_f}$$

se for uma série de potências. A representação de uma série e de sua soma é a mesma. O contexto é que defini qual está em questão.

Como exemplo, a soma da série

$$\sum_{n=1}^{n=7} n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

é

$$\sum_{n=1}^{n=7} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 31$$

e a da série

$$\sum_{n=1}^{n=4} nx^n = x, 2x^2, 3x^3, 4x^4$$

é

$$\sum n = 1^{n=4} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4$$

Algumas séries possuem somas especiais. A de maior relevância do ponto de vista da Fisíca é a seguinte:

Definição 4.5 *A série de Taylor de uma função $f(x)$ em torno de um ponto $x = x_0$ é a soma dos elementos da série de potências definida por*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n}\bigg|_{x_0} (x - x_0)^n = f(x_0) + (x - x_0) \frac{df(x)}{dx}\bigg|_{x_0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\bigg|_{x_0} + \ldots$$

onde

$$\left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x_0}$$

representa a derivada n-ésima de $f(x)$ aplicada no ponto x_0, e $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$ é o fatorial de n. Se a série 6.3 convergir, então ela será igual à própria função $f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x_0} (x-x_0)^n &= f(x_0) + (x-x_0) \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0} \\ &+ \frac{1}{2}(x-x_0)^2 \left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x_0} + \ldots \end{aligned}$$

e a expressão acima é chamada expansão da função $f(x)$ em série de Taylor em torno do ponto x_0.

Para esclarecer este conceito, vejamos alguns exemplos. Primeiro, considere a função $f(x) = e^x$. Vamos expandi-la em torno do ponto $x_0 = 0$, ou seja, queremos achar

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{d^n}{dx^n}(e^x)\right|_0 (x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

que é a série de Taylor de $f(x) = e^x$. O primeiro termo corresponde a $n = 0$, ou seja,

$$a_0 = \frac{1}{0!} x^0 e^0 = 1$$

O segundo, que tem $n = 1$, é

$$a_1 = \frac{1}{1!} x^1 \left[\frac{d}{dx}(e^x)\right]_0 = x(e^x)_0 = x$$

O terceiro tem $n = 2$ e fica

$$a_2 = \frac{1}{2!} x^2 \left[\frac{d^2}{dx^2}(e^x)\right]_0 = \frac{1}{2} x^2 (e^x)_0 = \frac{1}{2} x^2$$

e assim sucessivamente. O n-ésimo termo é

$$a_n = \frac{1}{n!} x^n \left[\frac{d^n}{dx^n}(e^x)\right]_0 = \frac{1}{n!} x^n (e^x)_0 = \frac{1}{n!} x^n$$

e a série de Taylor fica

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

Assim, a função e^x pode ser aproximada por uma série de Taylor, dada acima. Se quisermos uma aproximação até segunda ordem, faremos

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

que é boa somente se $x << 1$. Quando x é razoavelmente grande, é preciso considerar mais termos da série para conseguir uma aproximação melhor.

Considere agora a função $f(x) = \cos x$. Vamos calcular a sua série de Taylor em torno do ponto $x_0 = 0$. Isto significa que queremos encontrar

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(\cos x)\bigg|_0 (x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Para $n = 0$, temos

$$a_0 = \frac{1}{0!}x^0 \cos 0 = 1$$

Quando $n = 1$, obtemos

$$a_1 = \frac{1}{1!}x^1 \left[\frac{d}{dx}(\cos x)\right]_0 = -x(\sin x)_0 = 0$$

O terceiro termo tem $n = 2$ e fica

$$a_2 = \frac{1}{2!}x^2 \left[\frac{d^2}{dx^2}(\cos x)\right]_0 = \frac{1}{2}x^2(-\cos x)_0 = -\frac{1}{2}x^2$$

Quando $n = 3$, achamos

$$a_3 = \frac{1}{3!}x^2 \left[\frac{d^3}{dx^3}(\cos x)\right]_0 = \frac{1}{3!}x^3(\sin x)_0 = 0$$

Se $n = 4$, temos

$$a_4 = \frac{1}{4!}x^4 \left[\frac{d^4}{dx^4}(\cos x)\right]_0 = \frac{1}{4!}x^4(\cos x)_0 = \frac{1}{4!}x^4$$

e assim sucessivamente. Os termos com n ímpar são nulos e os pares são alternados, de forma que

$$a_2n = (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

e a série de Taylor de $f(x) = \cos x$ fica

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2n!} x^{2n} + \ldots$$

Quando $x << 1$, podemos aproximar $\cos x$ por

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$$

e se x for maior, são necessários mais termos da série.
Definição 4.6 *Quando uma série numérica*

$$\sum_n a_n$$

ou de potências

$$\sum_n a_n x^n = \sum_n b_n$$

converge, ocorre, para série numérica,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$$

e para a série de potências,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = L < 1$$

Se a série for alternada, torma-se o módulo, e ela converge absolutamente se

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$$

para a série numérica, e

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = L < 1$$

para a série de potências. Este teste é chamado de teste da razão. Se $L > 1$, a série diverge, e se $L = 1$, o teste da razão não é suficiente para determinar *a convergência da série. Neste caso, pode ser útil a propriedade válida para séries convergentes*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{57}$$

que é chamada de teste do termo geral. Se uma série for convergente, o limite acima é nulo, o que não implica que, sendo o limite nulo, a série seja convergente. Se o limite não for nulo, a série diverge.

Para exemplificar, consideremos a série de Taylor de e^x calculada enteriormente, que é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

onde

$$b_n = \frac{1}{n!} x^n$$

Façamos agora o teste da razão

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{1}{n!} x^n}$$

$$= x \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= x \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)n!}$$

$$= x \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 0$$

O limite é nulo e a exponencial pode ser representada por uma série de Taylor para qualquer valor de x, pois ela converge para qualquer valor de x, e assim,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Vejamos agora o caso do $\cos x$. A série de Taylor é

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

e

$$b_n=(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

O teste da razão fica

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|$$

lembrando que a série é alternada. Para considerar o módulo, basta desconsiderar o termo $(-1)^n$ de b_n, e assim,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{[2(n+1)]!}x^{2(n+1)}}{\frac{1}{2n!}x^{2n}}$$

$$=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)!}$$

$$=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+2)(2n)!}$$

$$=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=0$$

e a série converge para qualquer x. Então,

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

O nosso interesse básico com relação às séries como método de resolução de equações diferenciais diz respeito à possibilidade de uma função ser escrita como uma série de potências, especificamente uma série de Taylor, em torno de um ponto x_0. Nem sempre isso é possível, como, por exemplo, se x_0 for uma raiz, ou zero, do denominador de uma função racional como

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$$

Não é possível escrever a série de Taylor desta função em torno do ponto $x_0 = 1$, já que este ponto é a raiz do denominador. Neste caso, dizemos que a função não é analítica neste ponto, que é chamado de ponto singular. Para todos os outros valores de x_0, chamados pontos ordinários, a série de Taylor existe, e a função nestes pontos é analítica.

Tendo definido os conceitos essenciais para o método de séries, vamos então apresentá-lo.

4.2 Método de Séries

No estudo do método de séries, vamos nos concentrar na equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0$$

que agora tem coeficientes variáveis, ainda que a idéia seja geral, podendo ser usada para equações diferenciais de qualquer ordem. Queremos obter pelo menos uma solução $y(x)$, na forma de uma série de potências como

$$y(x) = \sum_{n}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{58}$$

onde x_0 é o ponto em torno do qual queremos achar a solução. Esta expressão é uma série, mas não necessariamente a série de Taylor de alguma função $f(x)$.

Podemos reescrever a equação diferencial na forma normalizada

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = 0 \tag{59}$$

onde

$$P_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)} \qquad \text{e} \qquad P_2(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}$$

Note que $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são duas funções racionais e, como foi dito anteriormente, não é possível escrever a série de Taylor de uma função racional em torno dos pontos x_0 que são as raízes do denominador. Isto tem que ser levado em conta se quisermos encontrar uma solução na forma (58).

Definição 4.7 *Se ambas as funções $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são analíticas em x_0, este ponto é dito ordinário. Se pelo menos uma das funçòes $P_1(x)$ e $P_2(x)$ não é analítica em x_0, este ponto é dito singular.*

Por exemplo, na equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2+5)y = 0$$

temos

$$P_1(x) = x \qquad \text{e} \qquad P_2(x) = x^2 + 5$$

que são polinômios e não têm nenhum ponto singular. Todos os pontos são ordinários. Já a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + (x^2 - 4x + 5)y = 0$$

onde

$$P_1(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad P_2(x) = x^2 - 4x + 5$$

tem um ponto singular em $x_0 = 0$, apesar de $P_2(x)$ ser analítica em todos os pontos.

A distinção entre pntos ordinários e singulares é necessária por causa do seguinte teorema:

Teorema 4.1 *A equação diferencial (59) tem duas soluções diferentes, linearmente independentes, na forma da equação (58)*

$$y(x) = \sum_n^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

desde que x_0 seja um ponto ordinário. Ou seja, se x_0 for um ponto ordinário de (59), através do método de séries é possível encontrar as duas soluções LI em torno de x_0 que formam a solução geral da equação diferencial. O que diferencia as duas soluções são os a_n.

Como exemplo, no caso das suas equações diferenciais anteriores, a primeira não tem nenhum ponto singular, e assim podemos achar a solução para qualquer valor de x_0, como, por exemplo,

$$y(x) = \sum_n a_n (x-2)^n, \qquad y(x) = \sum_n a_n x^n, \qquad y(x) = \sum_n a_n (x+4)^n$$

No entanto, a segunda tem um ponto singular em $x_0 = 0$. Com certeza ela tem duas soluções LI para $x_0 \neq 0$, isto é,

$$y(x) = \sum_n a_n (x-2)^n, \qquad y(x) = \sum_n a_n (x+4)^n$$

mas não sabemos ainda o que ocorre se $x_0 = 0$. Inicialmente, vamos apresentar o método para pontos ordinários, considerando a primeira equação diferencial do exemplo anterior,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2+5)y = 0 \tag{60}$$

que, como já foi dito, não tem nenhum ponto singular. Vamos achar uma solução em torno de $x_0 = 0$, na forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{61}$$

Se (60) é solução, quando a substituirmos e também suas derivadas na equação (61), acharemos uma igualdade, semelhante ao que ocorre no método de coeficientes constantes. Calculamos então

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

e substituímos tudo isso na equação diferencial, que fica

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (x^2+5) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

ou ainda,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + 5 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Para podermos continuar, primeiro precisamos fazer com que x seja elevado ao mesmo expoente em cada uma das somatórias. Por isso, devemos reescrever o primeiro e o terceiro termos da equação. Fazemo-lo da seguinte forma. O primeiro termo é

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

A gora, chamamos $m = n - 2$, ou $n = m + 2$. Ficamos com

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)a_{m+2}x^m$$

Como m e n são apenas variáveis mudas, que simplismente indicam onde começa e termina a somatória, podemos trocar m por n na equação acima, ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

Para o terceiro termo, que é

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

fazemos $m = n + 2$, ou $n = m - 2$. Neste caso,

$$\sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2}x^m$$

e, retornando para n,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$

Agora, voltamos à equação inicial, substituindo os termos reescritos. O resultado é

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n + 5\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \qquad (62)$$

Apesar do expoente ser o mesmo, a faixa de valores de n é diferente, sendo que a faixa comum começa em $n = 2$. Assim, reescrevemos a equação acima explicitando os termos com $n = 0$ e $n = 1$, ou seja, para a primeira soma temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}2x^n = 2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

a segunda fica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n$$

e a quarta é

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n$$

Com estas expressões, a equação (62) resulta em

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n + 5a_0 + 5a_1 x + 5\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0$$

ou

$$(5a_0 + 2a_2) + (5a_1 + 6a_3)x$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+5)a_n + a_{n-2}\right]x^n = 0$$

Se queremos que a equação acima seja válida, ela tem que ser verificada para cada potência de x. Assim, igualamos os coeficientes dos polinômios, ou seja,

$$5a_0 + 2a_2 = 0 \tag{63}$$

$$5a_1 + 6a_3 = 0 \tag{64}$$

e

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+5)a_n + a_{n-2} = 0 \tag{65}$$

A condição (63) nos diz que

$$5a_0 + 2a_2 = 0$$

$$2a_2 = -5a_0$$

$$a_2 = -\frac{5}{2}a_0$$

A segunda (equação (64) nos dá

$$5a_1 + 6a_3 = 0$$

$$6a_2 = -5a_1$$

$$a_3 = -\frac{5}{6}a_1$$

e a condição (65) permite que calculemos a_{n+2} em termos de a_n e a_{n-2}, como pode ser observado se a escrevemos como

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+5)a_n + a_{n-2} = 0$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = -\left[(n+5)a_n + a_{n-2}\right]$$

$$a_{n+2} = -\frac{(n+5)a_n + a_{n-2}}{(n+2)(n+1)} \qquad n \geq 2 \tag{66}$$

Por exemplo, se $n = 2$, temos

$$a_{2+2} = -\frac{(2+5)a_2 + a_{2-2}}{(2+2)(2+1)}$$

$$a_4 = -\frac{7a_2 + a_0}{12}$$

$$= -\frac{7[-\frac{5}{2}a_0] + a_0}{12}$$

$$= -a_0\frac{[-\frac{35}{2}] + 1}{12}$$

$$= -a_0\frac{[-\frac{33}{3}]}{12}$$

$$a_4 = \frac{33}{24}a_0$$

e quando $n = 3$, achamos

$$a_{3+2} = -\frac{(3+5)a_3 + a_{3-2}}{(3+2)(3+1)}$$

$$a_5 = -\frac{8a_3 + a_1}{24}$$

$$= -\frac{8[-\frac{5}{6}a_1] + a_1}{24}$$

$$= -a_1\frac{[-\frac{20}{3}] + 1}{24}$$

$$= -a_1\frac{[-\frac{17}{3}]}{24}$$

$$a_5 = \frac{17}{72}a_1$$

Podemos continuar aplicando a relação (66) indefinidamente, e assim acharemos os coeficientes com n par em termos de a_0 e com n ímpar em termos de a_1. Esta relação é chamada uma relação de recorrência.

Substituindo os valores achados na solução tentativa , que é

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ficamos com

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots$$

$$y = a_0 + a_1x - \frac{5}{2}a_0x^2 - \frac{5}{6}a_1x^3 + \frac{33}{24}a_0x^4 + \frac{17}{72}a_1x^5 + \dots$$

$$y(x) = a_0\left[1 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{33}{24}x^4 + \dots\right] + a_1\left[x - \frac{5}{6}x^3 + \frac{17}{]}72x^5 + \dots\right] \qquad (67)$$

que é a solução em séries da equação diferencial (60). Ela é formada por duas soluções LI, que são

$$y_1(x) = 1 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{33}{24}x^4 + \dots$$

$$y_2(x) = x - \frac{5}{6}x^3 + \frac{17}{72}x^5 + \dots$$

combinadas com um coeficiente constante para formar a solução geral

$$y = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x)$$

que é a equação (67). Portanto, achamos a série para um ponto ordinário x_0 $(x_0 - 0,$ neste caso), temos duas soluções LI, que formam a solução geral, e ambas as soluções são obtidas ao mesmo tempo.

4.3 Método de Frobenius

Como vimos na seção anterior, o método de séries para achar soluçòes de equações diferenciais em torno de um ponto x_0 é bastante simples. É necessário apenas que x_0 seja um ponto ordinário da equação (59) para as duas soluções LI sejam encontradas. E se o ponto for singular? Neste caso, temos que separar duas possibilidades:
Definição 4.8 *Considere a equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = 0$$

sendo x_0 um ponto singular da equação.Se

$$(x - x_0)P_1(x) \qquad \text{e} \qquad (x - x_0)^2 P_2(x)$$

forem ambas analíticas, então x_0 é um ponto singular regualr. Se pelo menos uma não for analítica, x_0 é um ponto singular irregular.

Por exemplo, na equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x-3}\frac{dy}{dx} + \frac{x^2-1}{x-3}y = 0$$

temos

$$P_1(x) = \frac{1}{x-3} \qquad \text{e} \qquad P_2(x) = \frac{x^2-1}{x-3}$$

que têm um ponto singular em $x_0 = 3$. Todos os outros pontos são ordinários, e assim, se quisermos resolver a equação diferencial em torno de qualquer ponto que não seja $x_0 = 3$, podemos utilizar o m"etodo normal de séries, e acharemos as duas soluçòes LI. Quando queremos a solução em torno de $x_0 = 3$, que é um ponto singular, primeiro precisamos saber se ele é regular ou irregular. Neste caso, calculando

$$(x-3)P_1(x) = (x-3)\frac{1}{x-3} = 1$$

e

$$(x-3)^2P_2(x) = (x-3)^2\frac{x^2-1}{x-3} = (x-3)(x^2-1)$$

vemos que estas funçòes são analíticas, e assim, o ponto $x_0 = 3$ é singular regular. A equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{(x-3)^2}\frac{dy}{dx} + \frac{x^2-1}{x-3}y = 0$$

tabém tem um ponto singular em $x_0 = 3$. No entanto, fazendo

$$(x-3)P_1(x) = (x-3)\frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{x-3}$$

e

$$(x-3)^2P_2(x) = (x-3)^2\frac{x^2-1}{x-3} = (x-3)(x^2-1)$$

notamos que a primeira função continua sendo não-analítica em $x_0 = 3$, e este ponto é singular irregular.

Quando um ponto singular é regular, temos o seguinte teorema (que não vamos provar):

Teorema 4.2 *Se x_0 é um ponto singular regular da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = 0$$

então existe pelo menos uma solução na forma

$$y(x) = |x-x_0|^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{68}$$

em torno de x_0, onde r é um parâmetro a ser determinado.

Como se acha a solução (68) para uma dada equação diferencial? Neste caso, procede-se de um modo muito semelhante ao que foi usado no método de séries, que, para esta situação, é chamado de método de Frobenius. Vejamos este método para a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{x-5}{2x^2}\right) y = 0$$

Esta equação tem um ponto singular em $x_0 = 0$. Todos os outros pntos são ordinários. Se desejássemos achar a solução em torno de qualquer ponto $x_0 \neq 0$, usaríamos o método de séries da seção anterior e teríamos a solução geral formada por duas soluçòes LI. Todavia, como queremos achar a solução em torno de $x_0 = 0$, primeiro devemos descobrir se este ponto singular é regular ou não. Para esta equação, temos

$$P_1(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad P_2(x) = \frac{x-5}{2x^2}$$

e, fazendo o teste

$$xP_1(x) = x\frac{1}{x} = 1 \qquad \text{e} \qquad x^2P_2(x) = x^2\frac{x-5}{2x^2} = \frac{x-5}{2}$$

vemos que o ponto é regular, pois as funções acima são analíticas. Reescrevemos a equação diferencial na forma equivalente
e agora supomos uma solução do tipo (68), ou seja,

$$y(x) = x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+r}$$

Calculando

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1}$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$$

e voltando à equação diferencial, temos

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2} + 2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1} + (x-5)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r} = 0$$

ou

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+1}-5\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

Vamos reescrever o terceiro termo, considerando $m=n+1$ ou $n=m-1$, e então,

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+1}=\sum_{m=1}^{\infty}a_{m-1}x^{m+r}$$

e, voltando ao índice n, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r}$$

Retornando à equação inicial

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r}-5\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

observamos que todos estão com a mesma potência de x, mas as faixas comuns começam com $n=1$. Então, o primeiro termo fica

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+2\sum_{n=0}^{\infty}2r(r-1)a_0x^{r}$$
$$+2\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}$$

o segundo termo resulta em

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}=2ra_0x^r+2\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}$$

e o quarto é

$$-5\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = -5a_0x^r - 5\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Substituindo tudo na equação inicial, temos

$$2r(r-1)a_0x^r + 2\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r} + 2ra_0x^r + 2\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n+r} - 5a_0x^r - 5\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^{n+r} = 0$$

ou

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[(n+r)(n+r-1)+(n+r)-5\right]a_n + a_{n-1}\right\}x^{n+r}$$
$$+2\left[2r(r-1)+2r-5\right]a_0x^r = 0$$

Igualando os polinômios, e considerando $a_0 \neq 0$, temos

$$2r(r-1)+2r-5=0$$

$$\left[(n+r)(n+r-1)+(n+r)-5\right]a_n + a_{n-1} = 0$$

que são as duas condições neste caso. A primeira dá os valores de r, chamada de equação indicial, enquanto que a segunda é a relação de recorrência. Os valores de r são

$$2r(r-1)+2r-5=0$$

$$2r^2-2r+2r-5=0$$

$$2r^2-5=0$$

$$2r^2=5$$

$$r_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

e arelação de recorrência fica

$$[(n+r)(n+r-1)+(n+r)-5]\,a_n + a_{n-1} = 0$$

$$[(n+r)(n+r-1)+(n+r)-5]\,a_n = -a_{n-1}$$

$$[(n+r)(n+r-1)+(n+r)-5]\,a_n = -a_{n-1}$$

$$\left[(n+r)^2-5\right]a_n = -a_{n-1}$$

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(n+r)^2-5} \qquad n \geq 1$$

que se desdobra em duas outras, uma para cada valor de r, ou seja,

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{\left(n+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2-5} \qquad n \geq 1$$

e

$$b_n = -\frac{b_{n-1}}{\left(n+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2-5} \qquad n \geq 1$$

onde utilizamos b_n para diferenciar as duas relaçòes. Vamos achar alguns termos da série. Para $n=1$, temos

$$a_1 = -\frac{a_{n-1}}{\left(1+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2-5}$$

$$= -\frac{a_0}{\left(1+2\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{5}{2}\right)-5}$$

$$= -\frac{a_0}{\frac{7}{2}+\sqrt{10}}$$

$$a_1 = -\frac{2a_0}{7+2\sqrt{10}}$$

e

$$b_1 = -\frac{b_{1-1}}{\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 - 5}$$

$$= -\frac{b_0}{\left(1-2\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{5}{2}\right) - 5}$$

$$= -\frac{b_0}{\frac{7}{2}-\sqrt{10}}$$

$$b_1 = -\frac{2b_0}{7-2\sqrt{10}}$$

Quando $n = 2$, achamos

$$a_2 = -\frac{a_{2-1}}{\left(2+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 - 5}$$

$$= -\frac{a_1}{\left(4+4\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{5}{2}\right) - 5}$$

$$= -\frac{\left[-\frac{2a_0}{7+2\sqrt{10}}\right]}{\frac{13}{2}+2\sqrt{10}}$$

$$a_2 = \frac{4a_0}{(7+2\sqrt{10})(13+4\sqrt{10})}$$

e

$$b_2 = -\frac{a_{2-1}}{\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 - 5}$$

$$= -\frac{b_1}{\left(4-4\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{5}{2}\right) - 5}$$

$$= -\frac{\left[-\frac{2b_0}{7-2\sqrt{10}}\right]}{\frac{13}{2}-2\sqrt{10}}$$

$$b_2 = \frac{4b_0}{(7-2\sqrt{10})(13-4\sqrt{10})}$$

e assim sucessivamente. As soluções ficam

$$y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^{\sqrt{\frac{5}{2}}}\left\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\right\}$$

$$y_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^{-\sqrt{\frac{5}{2}}}\left\{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots\right\}$$

ou ainda,

$$y_1(x) = x^{\sqrt{\frac{5}{2}}}\left[a_0 - \frac{2a_0}{7+2\sqrt{10}}x + \frac{4a_0}{(7+2\sqrt{10})(13+4\sqrt{10})}x^2 + \dots\right]$$

$$y_1(x) = a_0 x^{\sqrt{\frac{5}{2}}}\left[1 - \frac{2}{7+2\sqrt{10}}x + \frac{4}{(7+2\sqrt{10})(13+4\sqrt{10})}x^2 + \dots\right]$$

e

$$y_2(x) = \frac{1}{x^{\sqrt{\frac{5}{2}}}}\left[b_0 - \frac{2b_0}{7-2\sqrt{10}}x + \frac{4b_0}{(7-2\sqrt{10})(13-4\sqrt{10})}x^2 + \dots\right]$$

$$y_2(x) = \frac{b_0}{x^{\sqrt{\frac{5}{2}}}}\left[1 - \frac{2}{7-2\sqrt{10}}x + \frac{4}{(7-2\sqrt{10})(13-4\sqrt{10})}x^2 + \dots\right]$$

e a solução geral é feita a partir da soma destas duas soluções, que são LI:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

ou

$$y(x) = a_0 x^{\sqrt{\frac{5}{2}}}\left[1 - \frac{2}{7+2\sqrt{10}}x + \frac{4}{(7+2\sqrt{10})(13+4\sqrt{10})}x^2\right] + \dots$$
$$\frac{b_0}{x^{\sqrt{\frac{5}{2}}}}\left[1 - \frac{2}{7-2\sqrt{10}}x + \frac{4}{(7-2\sqrt{10})(13-4\sqrt{10})}x^2 + \dots\right]$$

onde a_0 e b_0 dependem das condições auxiliares do problema. Note que neste caso as duas soluções LI foram obtidas.

Como se sabe a priori quantas e quais soluções serão encontradas? O seguinte teorema (que não será demonstrado) estabelece as condições para a obteção de soluções:

Teorema 4.3 *Se x_0 é um ponto singular da equação diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = 0$$

e r_1 e r_2 são as raízes da equação indicial associada a x_0, com $\Re(r_1) \geq \Re(r_2)$, as soluções da equação diferencial são:

1. Se $r_1 - r_2 \neq N$, onde N é um número natural, as soluçòes LI em série são

$$y_1(x) = |x - x_0|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

e

$$y_2(x) = |x - x_0|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

2. Se $r_1 - r_2 = N$, $N \neq 0$, as soluçòes LI em série são

$$y_1(x) = |x - x_0|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

e

$$y_2(x) = Cy_1(x) \ln|x - x_0| + |x - x_0|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

onde C é uma constante.

3. Se $r_1 = r_2$, as soluções LI em série ficam

$$y_1(x) = |x - x_0|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

e

$$y_2(x) = y_1(x) \ln|x - x_0| + |x - x_0|^{r_1+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

Nas soluções acima se percebe que sempre há uma série para o valor maior de r, que no caso é r_1, dada por

$$y_1(x) = |x - x_0|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

e o que muda é a outra solução, $y_2(x)$. Dependendo da eequação diferencial do roblema, achar a solução $y_2(x)$ pode ser bastante complicado, e não há um método genérico para encontrar $y_2(x)$.

Vejamos mais um exemplo de aplicação do método de Frobenius. Considere a equação diferencial

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - \left(x^2 + \frac{5}{4}\right) y = 0$$

que na forma normalizada, fica

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \left(\frac{x^2 + \frac{5}{4}}{x^2}\right) y = 0$$

Nste caso,

$$P_1(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{e} \qquad P_2(x) = \frac{x^2 + \frac{5}{2}}{x^2}$$

e vemos que $x_0 = 0$ é um ponto singular. Para verificar se é regular, fazemos

$$xP_1(x) = x\frac{1}{x} = 1 \qquad \text{e} \qquad x^2 P_2(x) = x^2 \frac{x^2 + \frac{5}{4}}{x^2} = x^2 + \frac{5}{4}$$

e observamos que, de fato, ele é regular. Assim, há pelo menos uma solução em série na forma (68), ou seja,

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Calculando

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

e voltando à equação diferencial, temos

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$$
$$- \left(x^2 + \frac{5}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r}$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} - \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

Precisamos reescrever o terceiro termo, chamando $m = n + 2$ ou $n = m - 2$, e assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{m-2} x^{m+r}$$

Voltando para n, temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r}$$

e a equação fica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r}$$
$$- \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} - \frac{5}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[n+r)(n+r-1) - (n+r) - \frac{5}{4}\right] a_n x^{n+r} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[n+r)(n+r-2) - \frac{5}{4}\right] a_n x^{n+r} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0$$

A faixa de n comum começa em $n = 2$, e assim, o primeiro termo fica

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-2)-\frac{5}{4}\right]a_n x^{n+r}=\left[r(r-2)-\frac{5}{4}\right]a_0x^r
$$
$$
+\left[(r+1)(r-1)-\frac{5}{4}\right]a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-2)-\frac{5}{4}\right]a_nx^{n+r}
$$

e, substituindo-o na equação, achamos

$$
\left[r(r-2)-\frac{5}{4}\right]a_0x^r+\left[(r+1)(r-1)-\frac{5}{4}\right]a_1x^{r+1}
$$
$$
+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-2)-\frac{5}{4}\right]a_nx^{n+r}-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+r}=0
$$

ou ainda,

$$
\left[r(r-2)-\frac{5}{4}\right]a_0x^r+\left[(r+1)(r-1)-\frac{5}{4}\right]a_1x^{r+1}
$$
$$
+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(n+r)(n+r-2)-\frac{5}{4}\right]a_n-a_{n-2}\right\}x^{n+r}=0
$$

que fornece as seguintes condições:

$$
r(r-2)-\frac{5}{4}=0
$$

$$
\left[(r+1)(r-1)-\frac{5}{4}\right]a_1=0
$$

$$
\left[(n+r)(n+r-2)-\frac{5}{4}\right]a_n-a_{n-2}=0
$$

A primeira equação é a equação indicial, que fornece o valor de r, que é

$$
r(r-2)-\frac{5}{4}=0
$$

$$
r^2-2r-\frac{5}{4}=0
$$

cujas raízes são $r_1=\frac{5}{2}$ e $r_2=-\frac{1}{2}$. Note que $r_1-r_2=3$ é um número natural e corresponde ao item 2 do teorema 4.3. Vonsiderando a primeira raiz, temos, para a segunda condição,

$$\left[\left(\frac{5}{2}+1\right)\left(\frac{5}{2}-1\right)-\frac{5}{4}\right]a_1=0$$

$$\left[\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{5}{4}\right]a_1=0$$

$$\left[\frac{21}{4}-\frac{5}{4}\right]a_1=0$$

$$\frac{16}{4}a_1=0$$

$$4a_1=0$$

$$a_1=0$$

e o coeficiente a_1 é nulo. A relação de recorrência fica

$$\left[\left(n+\frac{5}{2}\right)\left(n+\frac{5}{2}-2\right)-\frac{5}{4}\right]a_n-a_{n-2}=0$$

$$\left[\left(n+\frac{5}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{4}\right]a_n-a_{n-2}=0$$

$$(n^2+3n)a_n-a_{n-2}=0$$

$$n(n+3)a_n=a_{n-2}$$

$$a_n=\frac{a_{n-2}}{n(n+3)},\qquad n\geq 2$$

Desta relação achamos, para $n=2$,

$$a_2=\frac{a_{2-2}}{2(2+3)}$$

$$a_2 = \frac{a_0}{10}$$

para $n = 3$,

$$a_3 = \frac{a_{3-2}}{3(3+3)}$$

$$= \frac{a_1}{27}$$

$$a_3 = 0$$

para $a_1 = 0$. Na verdade, todos os n ímpares são nulos. Para $n = 4$, temos

$$a_4 = \frac{a_{4-2}}{4(4+3)}$$

$$= \frac{a_2}{48}$$

$$a_4 = \frac{a_0}{480}$$

e assim sucessivamente. A solução para esta raiz fica

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= x^{\frac{5}{2}} \left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots\right]$$

$$= x^{\frac{5}{2}} \left[a_0 + \frac{a_0}{10} x^2 + \frac{a_0}{480} x^4 + \ldots\right]$$

$$y_1(x) = a_0 x^{\frac{5}{2}} \left[1 + \frac{1}{10} x^2 + \frac{1}{480} x^4 + \ldots\right] \tag{69}$$

Precisamos achar agora a outra solução. O teorema 4.3 nos diz que, neste caso, a outra solução deveria ser

$$y_2(x) = Cy_1(x)\ln|x - x_0| + |x - x_0|^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$$

que é razoavelmente complicada. No entanto, vamos primeiro testar a outra raiz $r_2 = -\frac{1}{2}$, como fizemos com $r_1 = \frac{5}{2}$, e ver se a solução que resulta dessa suposição é LI com (69). Com esta raiz, a segunda condição fica

$$\left[(r_2 + 1)(r_2 - 1) - \frac{5}{4}\right] a_1 = 0$$

$$\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right) - \frac{5}{4}\right] a_1 = 0$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{5}{4}\right] a_1 = 0$$

$$\left[-\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\right] a_1 = 0$$

$$\left[-\frac{8}{4}\right] a_1 = 0$$

$$-2a_1 = 0$$

$$a_1 = 0$$

e $a_1 = 0$, como no caso anterior. A relação de recorrência torna-se

$$\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{1}{2} - 2\right) - \frac{5}{4}\right] a_n - a_{n-2} = 0$$

$$\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{5}{2}\right) - \frac{5}{4}\right] a_n - a_{n-2} = 0$$

$$(n^2 - 3n)a_n - a_{n-2} = 0$$

$$n(n-3)a_n = a_{n-2} \tag{70}$$

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{n(n-3)} \qquad n \geq 2, n \neq 3 \tag{71}$$

Note que, para $n \neq 3$, podemos usar tanto (70) quanto (71). Vamos calcular alguns termos. Primeiro, $n = 2$, e temos

$$a_2 = \frac{a_{2-2}}{2(2-3)}$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2}$$

Para $n = 3$, usamos a equação (70), e achamos

$$3(3-3)a_3 = a_{3-2}$$

$$0a_3 = a_1$$

$$0a_3 = 0$$

Portanto, para qualquer valor de a_3, a igualdade é satisfeita, e a_3 é uma constante arbitrária, como a_0. Para $n = 4$, ficamos com

$$a_4 = \frac{a_{4-2}}{4(4-3)}$$

$$= \frac{a_2}{4}$$

$$a_4 = -\frac{a_0}{8}$$

Vamos calcular a_5, pois aparecerá o termo a_3

$$a_5 = \frac{a_{5-2}}{5(5-3)}$$

$$a_5 = \frac{a_3}{10}$$

e assim sucessivamente. A solução ficaria, substituindo a_n por b_n para diferenciá-la da solução (69),

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} \left[b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + \ldots \right]$$

$$= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \left[b_0 - \frac{b_0}{2} x^2 + b_3 x^3 - \frac{b_0}{8} x^4 + \frac{b_3}{10} x^5 \ldots \right]$$

$$= \frac{b_0}{\sqrt{x}} \left[1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + \ldots \right] + \frac{b_3}{\sqrt{x}} \left[x^3 + \frac{1}{10} x^5 \ldots \right]$$

$$= \frac{b_0}{\sqrt{x}} \left[1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + \ldots \right] + \frac{b_3 x^3}{\sqrt{x}} \left[1 + \frac{1}{10} x^2 \ldots \right]$$

$$y_2(x) = \frac{b_0}{\sqrt{x}} \left[1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + \ldots \right] + b_3 x^{\frac{5}{2}} \left[1 + \frac{1}{10} x^2 \ldots \right] \tag{72}$$

A solução (72) é muito interessante. Ela contém duas constantes arbitrárias e os dois termos entre chaves são linearmente independentes, ou seja, ela própria já é uma solução geral! Não teria sido necessário considerar a raiz maior, $r_1 = \frac{5}{2}$, já que, com a raiz menor, obtivemos toda a solução. Além disso, o segundo termo entre chaves é na verdade a solução $y_1(x)$, equação (69), apenas com um coeficiente diferente. Quando ocorre este caso, que é o item 2 do teorema 4.3, é sempre útil primeiro tentar encontrar a solução da equação diferencial com raiz menor, pois em alguns casos o resultado será semelhante ao que ocorreu aqui, e isso poupará muito tempo, já que não será preciso trabalhar com a outra raiz.

5 Equações Diferenciais Parciais

5.1 Equações Diferenciais Parciais Simples

Algumas equações diferenciais parciais são simples de resolver porque seguem os casos de equações diferenciais ordinárias. Por exemplo, a equação diferencial

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x + x^2 + 2y$$

é resolvida através de

$$\partial z = (x + x^2 + 2y)\partial x$$

$$\int \partial z = \int (x + x^2 + 2y)\partial x$$

$$z(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 2yx + \phi(y)$$

onde ϕ é uma função que depende no máximo de y e que pode ser determinada se houver mais alguma condição auxiliar.

Vejamos outro exemplo: a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = x^2 - e^t$$

tem como resultado

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = x^2 - e^t$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = x^2 - e^t$$

$$\int \partial \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \int (x^2 - e^t)\partial x$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{x^3}{3} - xe^t + \phi(t)$$

$$\partial y = \left(\frac{x^3}{3} - xe^t + \phi(t)\right)\partial t$$

$$\int \partial y = \int \left(\frac{x^3}{3} - xe^t + \phi(t)\right)\partial t$$

$$y = \frac{x^3 t}{3} - xe^t + \int \phi(t)dt + \alpha(x)$$

ou

$$y(x,t) = \frac{x^3 t}{3} - xe^t + \beta(t) + \alpha(x)$$

e as funções $\alpha(x)$ e $\beta(t)$ precisam de condições adicionais para serem encontradas.

Quando as equações diferenciaias parciais são simples como as anteriores, é fácil resolvê-las. No entanto, em geral os problemas um pouco mais complexos, e é preciso usar outros métodos.

5.2 Método de Separação de Variáveis

Para tentar separar as variáveis de uma equação diferencial com n variáveis independentes, partimos da suposição de que a solução dessa equação diferencial seja um produto de n funções e que cada uma seja função apenas de uma das variáveis independentes. Com essa suposição, substituimos a solução na equação diferencial e, se o método funcionar, após as devidas simplificações teremos n equações diferenciais ordinárias, que podem ou não ser resolvidas através dos métodos já vistos. Vamos ilustrar o procedimento para a equação diferencial parcial

$$x\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Para resolver esta equação diferencial, vamos supor que a solução seja dada pelo produto

$$z(x,y) = X(x)Y(y)$$

onde $X(x)$ é uma função apenas de x e $Y(y)$ é uma função apenas de y. Substituindo esta solução tentativa na equação diferencial, temos

$$x\frac{\partial}{\partial x}[X(x)Y(y)] = \frac{\partial}{\partial y}[X(x)Y(y)]$$

Em princípio, as derivadas dos produtos acima envolveriam termos com derivadas em X e em Y. Como $X(x)$ é uma função apenas de x e $Y(y)$ é uma função apenas de y, algumas derivadas são nulas, e resultado é

$$xY(y)\frac{\partial X(x)}{\partial x} = X(x)\frac{\partial Y(y)}{\partial y}$$

Como as funções X e Y são funções apenas de uma variável, as derivadas parciais são na verdade ordinárias. Além disso, dividimos ambos os lados por $X(x)Y(y)$, o que resulta em

$$\frac{x}{X(x)}\frac{dX(x)}{dx} = \frac{1}{Y(y)}\frac{dY(y)}{dy}$$

Agora, percebemos que o lado esquerdo desta equação depende apenas da variável x, pois $X(x)$ é uma função somente de x. Enquanto isso, o lado direito depende apenas de y, pois $Y(y)$ é uma função de y. No entanto, estes dois lados são iguais, e isso só acontece se eles forem iguais a uma constante independente de x e y. Explicitamente, temos

$$\frac{x}{X(x)}\frac{dX(x)}{dx} = \frac{1}{Y(y)}\frac{dY(y)}{dy} = c$$

e esta equação dá origem a duas outras, pois devemos ter

$$\frac{x}{X(x)}\frac{dX(x)}{dx} = c$$

ao mesmo tempo que

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{dY(y)}{dy} = c$$

$$\frac{dX)}{dx} = c\frac{X}{x}$$

e

$$\frac{dY)}{dy} = cY$$

Vemos que agora temos duas equações diferenciais ordinárias, uma para cada variável independente. Podemos resolvê-las através de

$$\frac{dX}{dx} = c\frac{X}{x}$$

$$\frac{dX}{X} = c\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dX}{X} = c\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln X = c\ln x + c\ln k$$

$$\ln X = c\ln kx$$

$$\ln X = \ln(kx)^c$$

$$X = (kx)^c$$

$$X = k^c x^c$$

$$X(x) = Kx^c$$

onde k e K são constantes de integração, e

$$\frac{dY}{dy} = cY$$

$$\frac{dY}{Y} = cdy$$

$$\int \frac{dY}{Y} = c\int dy$$

$$\ln Y = cy + d$$

$$Y = e^{cy+d}$$

$$Y = e^{cy}e^{d}$$

$$Y(y) = De^{cy}$$

em que d e D são constantes de integração, e a solução geral fica

$$z(x, y) = X(x)Y(y) = Kx^c De^{cy} = Ex^c e^{cy}$$

na qual reunimos todas as constantes em E, que pode ser encontrada se tivermos condições auxiliares. Note que existem duas incógnitas, E e c, e que precisamos de duas condições auxiliares para encontrá-las.

Vejamos mais um exemplo. A equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

pode ser separada se considerarmos uma solução do tipo

$$u(y, t) = Y(y)T(t)$$

em que $Y(t)$ é uma função apenas de y e $T(t)$ é uma função apenas de t. Colocando esta solução na equação diferencial, temos

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}[Y(y)T(t)] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}[Y(y)T(t)]$$

Algumas derivadas dos produtos acima são nulas, e o resultado final é

$$T(t)\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = Y(y)\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}$$

Dividindo esta expressão por $Y(y)T(t)$, obtemos

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = \frac{1}{T(t)}\frac{d^2 T(t)}{dt^2}$$

Novamente, temos uma separação das variáveis. O lado esquerdo da equação depende no máximo de y, enquanto que o lado direito depende no máximo de t. Como os dois lados são iguais, eles só dependem ser iguais a uma constante númerica. Por omodilidade, esta constante é escrita $-k^2$, para que os cálculos posteriores sejam simplificados. Então,

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = \frac{1}{T(t)}\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -k^2$$

o que fornece duas equações diferenciais,

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = -k^2$$

e

$$\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = -k^2$$

Estas equações podem ser reescritas como

$$\frac{d^2Y(t)}{dy^2} + k^2Y = 0$$

e

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + k^2T = 0$$

Elas são equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes constantes. Relembrando a seção 3.2, a primeira tem a seguinte equação característica:

$$m^2 + k^2 = 0 \qquad m = \pm ik$$

e as suas soluções são as funções

$$e^{ik}, qquade^{-iky}$$

que formam a solução geral

$$Y(y) = a_1e^{iky} + a_2e^{-iky}$$

A segunda tem a equação característica

$$m^2 + k^2 = 0 \qquad m = \pm ik$$

e as raízes são iguais às do caso anterior. Suas soluções são as funções

$$e^{ikt}, \qquad e^{-ikt}$$

e a solução geral fica

$$T(t) = b_1e^{ikt} + b_2e^{-ikt}$$

De posse destas duas soluções, a solução da equação diferencial parcial fica

$$u(y,t) = Y(y)T(t) = [a_1 e^{iky} + a_2 e^{-iky}][b_1 e^{ikt} + b_2 e^{-ikt}]$$

e as constantes precisam de quatro condiçòes auxiliares para serem determinadas.

Vejamos ainda outro exemplo. Seja a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}$$

Para este caso, vamos supor uam solução na forma

$$v(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

e aplicá-la na equação diferencial, o que resulta em

$$\frac{\partial}{\partial x}[X(x)Y(y)Z(z)] + \frac{\partial}{\partial y}[X(x)Y(y)Z(z)] = \frac{\partial}{\partial z}[X(x)Y(y)Z(z)]$$

Lembrando que $X(x)$ é uma função apenas de x, que $Y(y)$ é função apenas de y e que $Z(z)$ é função apenas de z, várias derivadas dos produtos acima se anulam, e resta

$$Y(y)Z(z)\frac{\partial X(x)}{\partial x} + X(x)Z(z)\frac{\partial Y(y)}{\partial y} = X(x)Y(y)\frac{\partial Z(z)}{\partial z}$$

agora, dividimos tudo por $X(x)Y(y)Z(z)$, o que dá

$$\frac{1}{X}\frac{dX}{dx} + \frac{1}{Y}\frac{dY}{dy} = \frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz}$$

Aparentemente, a situação é mais complicada que nos casos anteriores. No entanto, analisando-a mais profundamente, vemos que o lado direito desta equação pode ser no máximo uma função de z, enquanto que o lado esquerdo pode ser no máximo uma função de x e y. Para que possam ser iguais, eles tem que ser uma constante numérica, e assim,

$$\frac{1}{X}\frac{dX}{dx} + \frac{1}{Y}\frac{dY}{dy} = \frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz} = c$$

o que nos fornece duas equações diferenciais,

$$\frac{1}{X}\frac{dX}{dx} + \frac{1}{Y}\frac{dY}{dy} = c$$

e

$$\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dz} = c$$

e esta última pode ser escrita como

$$\frac{dZ}{dz} - cZ = 0$$

que é rapidamente resolvida, pois

$$\frac{dZ}{dz} = cZ$$

$$\frac{dZ}{Z} = cdz$$

$$\int \frac{dZ}{Z} = \int cdz$$

$$\ln Z = cz + a$$

$$Z = e^{cz+a}$$

$$Z = e^{cz}e^{a}$$

$$Z = Z_0 e^{cz}$$

A outra pode ser escrita como

$$\frac{1}{X}\frac{dX}{dx} = c - \frac{1}{Y}\frac{dY}{dy}$$

e fazendo as mesmas considerações, percebemos que o lado direito é função no máximo de y, ao passo que o esquerdo é função no máximo de x. Eles devem ser, na verdade, uma outra constante, ou seja,

$$\frac{1}{X}\frac{dX}{dx} = c - \frac{1}{Y}\frac{dY}{dy} = b$$

e, como resultado, temos as equações diferenciais

$$\frac{1}{X}\frac{dX}{dx} = b$$

e

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dy} = c - b$$

que ficam

$$\frac{dX}{dx} = bX$$

e

$$\frac{dY}{dy} = (c - b)Y$$

que resultam em

$$\frac{dX}{dx} = bX$$

$$\frac{dX}{X} = bdx$$

$$\int \frac{dX}{X} = \int bdx$$

$$\ln X = bx + f$$

$$X = e^{bx}e^{f}$$

$$X = X_0 e^{bx}$$

e

$$\frac{dY}{dy} = (c - b)Y$$

$$\frac{dY}{Y} = (c - b)dy$$

$$\int \frac{dY}{Y} = \int (c-b)dy$$

$$\ln Y = (c-b)y + g$$

$$Y = e^{(c-b)y+g}$$

$$Y = e^{(c-b)y}e^{g}$$

$$Y = Y_0 e^{(c-b)y}$$

A solução geral fica

$$v(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) = X_0 e^{bx} Y_0 e^{(c-b)y} Z_0 e^{cz} = v_0 e^{bx+(c-b)y+cz}$$

que tem três constantes a serem determinadas pelas condiçòes auxiliares.

O método de separação de variáveis é o mais utilizado para a resolução de equações diferenciais parciais, por causa de sua simplicidade e eficiência. No entanto, não há como saber a priori se esta técnica funcionará para uma dada equação diferencial. É preciso tentar uma solução como produto de funções e verificar a separação das variáveis.

Considere agora a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha e^{-\beta x}$$

Se tentarmos usar o método de separação de variáveis diretamente na equação não-homogênea acima, veremos que não é possível obter duas equações diferenciais ordinárias separadas. Neste caso, devemos primeiro tentar isolar o termo que não envolve derivadas parciais. Como tentativa, fazemos a seguinte suposição para a solução da equação diferencial:

$$u(x,y) = v(x,y) + z(x)$$

de maneira que a equação diferencial fique

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[v(x,y) + z(x)] - \frac{\partial}{\partial y}[v(x,y) + z(x)] = -\alpha e^{-\beta x}$$

$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{d^2 z(x)}{dx^2} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial z(x)}{\partial y} = -\alpha e^{-\beta x}$$

$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} + \frac{d^2 z}{dx^2} = -\alpha e^{-\beta x}$$

Agora, impomos que $z(x)$ deve ser tal que ocorra

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \alpha e^{-\beta x}$$

de forma que $v(x,y)$ esteja sujeito à equação diferencial parcial homogênea

$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0$$

e observamos que, para a equação diferencial parcial acima, o método de separação de variáveis pode ser aplicado. Resolvemos primeiro a equação para $z(x)$ temos

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \alpha e^{-\beta x}$$

Vamos chamar

$$p = \frac{dz}{dx}$$

e a equação diferencial fica

$$\frac{dp}{dx} = -\alpha e^{-\beta x}$$

$$dp = -\alpha e^{-\beta x} dx$$

$$\int dp = \int -\alpha e^{-\beta x} dx$$

$$p = \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta x} + \gamma$$

onde γ é uma constante. Como

$$\frac{dz}{dx} = p$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta x} + \gamma$$

$$dz = \left(\frac{\alpha}{\beta} e^{-betax} + \gamma \right) dx$$

$$\int dz = \int \left(\frac{\alpha}{\beta} e^{-betax} + \gamma \right) dx$$

$$z(x) = -\frac{\alpha}{\beta^2} e^{-\beta x} + \gamma x + \delta$$

sendo δ uma outra constante. Precisamos agora resolver a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0$$

através da separação de variáveis. Vamos supor uma solução

$$v(x,y) = X(x)Y(y)$$

e a equação diferencial fica

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[X(x)Y(y)] - \frac{\partial}{\partial y}[X(x)Y(y)] = 0$$

$$Y(y)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = X(x)\frac{\partial Y(y)}{\partial y}$$

$$Y\frac{d^2 X}{dx^2} = X\frac{dY}{y}$$

Dividindo esta expressão por $X(x)Y(y)$, ficamos com

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{dY}{dy}$$

onde o lado direito depende no máximo de y e o esquerdo no máximo de x. Para que sejam iguais, eles tem que ser uma constante numérica. Assim,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{dY}{dy} = -c^2$$

que resulta nas equações diferenciais

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -c^2$$

e

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{dy} = -c^2$$

ou

$$\frac{d^2X}{dx^2} + c^2X = 0$$

e

$$\frac{dY}{dy} = -c^2Y$$

Vamos resolver primeiro esta última:

$$\frac{dY}{dy} = -c^2Y$$

$$\frac{dY}{Y} = -c^2dy$$

$$\int \frac{dY}{Y} = \int -c^2dy$$

$$\ln Y = -c^2y + \ln Y_0$$

$$Y = e^{-c^2y+\ln Y_0}$$

$$Y = e^{-c^2 y} e^{\ln Y_0}$$

$$Y(y) = Y_0 e^{-c^2 y}$$

A primeira é

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + c^2 X = 0$$

que tem uma equação característica

$$m^2 + c^2 = 0 \qquad m = \pm ic$$

A solução geral é

$$X(x) = a e^{icx} + b e^{-icx}$$

que também pode ser colocada na forma

$$X(x) = a \cos cx + b \sin cx$$

Portanto, temos

$$v(x, y) = X(x) Y(y)$$

$$= [a \cos cx + b \sin cx] Y_0 e^{-c^2 y}$$

$$v(x, y) = [a_0 \cos cx + b_0 \sin cx] e^{-c^2 y}$$

e para $u(x, y) = v(x, y) + z(x)$, temos

$$u(x, y) = [a_0 \cos cx + b_0 \sin cx] e^{-c^2 y} - \frac{\alpha}{\beta^2} e^{-\beta x} + \gamma x + \delta$$

que é a solução geral da equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\alpha e^{-\beta x}$$