Universidade Federal de Rondônia **Departamento de Física**
Física Conteporânea MNPEF/SBF - Polo 40
Terceira lista Professor Dr^o Ariel Adorno de Sousa

1. Using the rules of bra-ket algebra, prove or evaluate the following:
   (a) $tr(XY) = tr(YX)$, where, X and Y are operators;
   (b) $(XY)^\dagger = X^\dagger Y^\dagger$, where, X and Y are operators;
   (c) $\exp[if(A)] = ?$ in ket-bra form, where A is Hermitian operator whose eigenvalues are known;
   (d) $\sum_{a'} \psi^*_{a'}(x')\psi_{a'}(x'')$, where $\psi_{a'}(x') = \langle x'|a'\rangle$.

2. Consider two kets $|\alpha\rangle$ and $|\beta\rangle$. Suppose $\langle a'|\alpha\rangle$, $\langle a''|\alpha\rangle$, ... and $\langle a'|\beta\rangle$, $\langle a''|\beta\rangle$,... are all known, where $|a'\rangle$, $|a''\rangle$, ... form a comple set of base kets, Find the matrix represetation of the operator $|\alpha\rangle\langle\beta|$ in that basis.

3. We now considerar a spin $\frac{1}{2}$ system and let $|\alpha\rangle$ and $|\beta\rangle$ be $\left|S_z = \hbar/2\right\rangle$ and $\left|S_x = \hbar/2\right\rangle$, respectively. Write down explicitly the square matrix that corresponds to $|\alpha\rangle\langle\beta|$ in the usual (S_z diagonal) basis.

4. Using the orthonormality of $|+\rangle$ and $|-\rangle$, prove,
   (a)
   $$[S_i, S_j] = i\varepsilon_{ijk}\hbar S_k,$$
   (b)
   $$\{S_i, S_j\} = \left(\frac{\hbar^2}{2}\right)\delta_{ij}$$
   Where,
   $S_x = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)$, $S_y = \frac{i\hbar}{2}\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)$ And $S_z = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right)$

5. Compute
   $$\left\langle(\Delta S_x)^2\right\rangle \equiv \left\langle S_x^2\right\rangle - \langle S_x\rangle^2,$$
   Where the expectation value is taken for the S_z+ state. Using your result, check the generalized uncertainty relation
   $$\left\langle(\Delta A)^2\right\rangle\left\langle(\Delta B)^2\right\rangle \geqslant \frac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2,$$
   With $A \to S_x$ and $B \to S_y$

6. Considere o potencial

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 a^2}{m} sech^2(ax),$$

em que a é uma constante positiva e 'sech' indica secante hiperbólica.

(a) Faça uma representação gráfica desse potencial;

(b) verifique se esse potencial tem como estado fundamental

$$\Psi_0(x) = Asech(ax)$$

e calcule a sua energia. Normalize Ψ_0 e esboce um gráfico.

(c) Demostre que a função

$$\Psi_k(x) = A\left(\frac{ik - atgh(ax)}{ik + a}\right)e^{ikx}.$$

(em que $k = \sqrt{2mE/\hbar}$, como sempre), resolve a equação de Schrödinger para qualquer energia (positiva) E. Sendo que $tghz \to -1$ quando $z \to -\infty$,

$\Psi(x) \approx Ae^{ikx}$, para x grande e negativo.

Isso representa, então, uma inda vinda da esquerda sem *onda de acompanhamento refletida* (isto é, sem termos e^{-ikx}). Qual é a forma assintótica de $\Psi_k(x)$ em x grande positivo? Quais são R e T para esse potencial?

PS. esse é um exemplo famoso do **potencial sem reflexão**: toda partícula incidente, independentemente de sua energia, passa diretamente.

7. Demostre que a integral abaixo satisfaz as condições para um produto interno.

$$\langle f \,|g\rangle = \int_a^b f(x)^* g(x)dx$$

8. Suponha que

$$\Psi(x,0) = \frac{A}{x^2 + a^2}, \quad (-\infty < x < \infty)$$

para constantes A e a.

(a) Determine A, normalizando $\Psi_1(x, 0)$;

(b) Calcule $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$ e σ_x (em tempo $t = 0$);

(c) Calcule a função de onda para o espaço de momento $\Phi(p, 0)$ e certifique-se de que ela esteja normalizada;

(d) Use $\Phi(p, 0)$ para calcular $\langle p\rangle$, $\langle p^2\rangle$ e σ_p (em tempo $t = 0$).

(e) Verifique o princípio da incerteza de Heisenberg para esse estado.

9. Se as funções de onda $\Psi_1(x,t)$, $\Psi_2(x,t)$ e $\Psi_3(x,t)$ são três soluções da equação de Schrödinger para um potencial particular V(x,t), mostre que a combinação linear arbitrária $\Psi(x,t) = c_1\Psi_1(x,t) + c_2\Psi_2(x,t) + c_3\Psi_3(x,t)$ também é uma solução desta equação.

10. Substituindo na equação de Schorödinger indepente do tempo o potencial ilustrado na fig (5-23) (Livro do Eisberg), mostre que à direita da região onde a partícula estaria ligado a autofunção tem a forma matemática:

$$\Psi(x) = Ae^{-[\sqrt{2m(V_0-E)/\hbar^2}]x} \rightarrow x > +a/2$$

11. Considere a autofunção ilustrada na parte superior da fig. 5-26 (Livro do Eisberg). (a) qual dos três potenciais ilustrados na parte inferior da figura poderia levar a tal autofunção? Dê argumentos qualitativos que justifiquem sua resposta. (b) A autofunção mostrada não é a correspondente ao estado de menor energia possível para o potencial. Trace o esboço da forma da autofunção que corresponde à menor energia. (c) Indique em outro esboço o intervalo de energia no qual você esperaria estados de energia possíveis discretos e o intervalo de energia no qual você esperaria que os estados possíveis fossem distribuídos continuamente.

12. Mostre que a autofunção do potencial degrau, para $E < V_0$, pode ser convertida da forma de soma de duas onda se propagando, como em (6-24), para uma onda estacionária, como (6-29) (equações do livro do Eisberg).

13. prove (6-44), que expressa os coeficientes de transmissão e reflexão em termos da razão E/V_0

14. Verifique por substituição gerais exponenciais, (6-63) e (6-64), sastisfazem à equação de Schrödinger independente do tempo (6-13) para o poço de potencial quadrado finito nas regiões fora do poço.

15. Verifique por substituição que a solução geral da onda estacionária, (6-67), satisfaz à equação de Schrödinger independente do tempo, (6-2), para o poço de potencial quadrado infinito na região dentro do poço.

16. A constante da força restauradora C para as vibrações interatômicas de uma molécula diatõmica típica é de aproximadamente 10^3 J/m^2. Use esse valor para fazer uma estimativa da energia de ponto zero das vibrações moleculares.

17. Considere a função de onda do estado fundamental do poço infinito e calcule:
    (a) Calcule o valor esperado da posição x e interprete seu resultado.
    (b) Além do valor esperado de um conjunto de muitas medidas, podemos calcular o desvio-padrão $\Delta x = \sqrt{< x^2 > - < x >^2}$. O desvio-padrão mede a faixa de valores em que a probabilidade de medida é alta. Dessa forma, ele dá uma idéia da incerteza da medida. Calcule o desvio-padrão da posição para o estado fundamental do poço infinito

18. Um feixe de prótons com uma energia cinética de 40 MeV incide sobre um degrau de potencial de 30 MeV.
    (a) Que fração do feixe é refletida?
    (b) Que fração do feixe é transmitida?
    (c) Como se modificam os resultados encontrados em (a) e (b), se a energia dos prótons for de 20MeV? Como se modificam os resultados encontrados em (a), (b), (c), se as partículas forem elétrons.

19. A função de onda de uma partícula livre é dada por $\Psi(x) = Asen(kx)$.
    (a) Encontre o valor de A que normaliza a função de onda em uma caixa de comprimento L.
    (b) Calcule o valor esperado do momento da partícula.
    (c) Calcule a energia total da partícula.

20. Um "estado ligado" é um estado quântico que está confinado a uma região do espaço, "ligado" a um poço de energia potencial. Veremos muitos exemplos de estados ligados nas próximas aulas. Matematicamente, podemos dizer que, para um estado ligado em torno de x = 0 em uma dimensão, $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = \lim_{x\to-\infty} \psi(x) = 0$
    (a) Mostre que, no caso estacionário em uma dimensão, a corrente de densidade de probabilidade é nula para um estado ligado, em qualquer ponto do espaço.
    (b) Usando o resultado do item anterior, mostre que $\left\langle \widehat{P} \right\rangle = 0$ para um estado ligado em uma dimensão. Dica: Use integração por partes.

[1]

[1] *A morte acaba com a vida do homem!*