*Exercícios 3.1*

1. Esboce o gráfico da função dada e, utilizando a idéia intuitiva de função contínua, determine os pontos em que a função deverá ser contínua.

*a*) $f(x) = 2$

*b*) $f(x) = x + 1$

*c*) $f(x) = x^2$

*d*) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \leqslant 1 \\ 2 \text{ se } x > 1 \end{cases}$

*e*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \text{ se } |x| \geqslant 1 \\ 2 \text{ se } |x| < 1 \end{cases}$

*f*) $f(x) = x^2 + 2$

2. Utilizando a idéia intuitiva de limite, calcule

*a*) $\lim\limits_{x \to 1} (x + 2)$

*b*) $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 1)$

*c*) $\lim\limits_{x \to 0} (3x + 1)$

*d*) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 1)$

*e*) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x}$

*f*) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x}{x + 3}$

*g*) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{x}$

*h*) $\lim\limits_{x \to 0} (\sqrt{x} + x)$

3. Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1}$. Utilizando a idéia intuitiva de limite, calcule $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1}$

4. Utilizando a idéia intuitiva de limite, calcule

*a*) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

*b*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{x}$

*c*) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

*d*) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$

*e*) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

*f*) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x$

ou seja,

$$p - \delta < x < p + \delta, x \neq p \Rightarrow f(x) > 0.$$

■

*Exercícios 3.3*

1. Calcule e justifique.

*a)* $\lim_{x \to 2} x^2$ *b)* $\lim_{x \to 1} (3x + 1)$

*c)* $\lim_{x \to -2} (4x + 1)$ *d)* $\lim_{x \to 10} 5$

*e)* $\lim_{x \to -9} 50$ *f)* $\lim_{x \to -1} (-x^2 - 2x + 3)$

*g)* $\lim_{x \to 4} \sqrt{x}$ *h)* $\lim_{x \to -3} \sqrt[3]{x}$

*i)* $\lim_{x \to -8} \sqrt{5}$ *j)* $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

*l)* $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$ *m)* $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

*n)* $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1}$ *o)* $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

*p)* $\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \dfrac{9x^2 - 1}{3x + 1}$ *q)* $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$

*r)* $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}}{x - 3}$ *s)* $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}}{x - 2}$

*t)* $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2}$ *u)* $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{2x + 3} - \sqrt{5}}$

2. Determine $L$ para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique.

*a)* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ L & \text{se } x = 2 \end{cases}$ em $p = 2$

*b)* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ L & \text{se } x = 3 \end{cases}$ em $p = 3$

*c)* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{\sqrt{x + 5} - \sqrt{10}} & \text{se } x \neq 5 \\ L & \text{se } x = 5 \end{cases}$ em $p = 5$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x}{x + 1} & \text{se } x \neq -1 \\ 2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$ é contínua em $-1$? E em 0? Por quê?



4. Calcule $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ sendo $f$ dada por

*a)* $f(x) = x^2$ *b)* $f(x) = 2x^2 + x$

*c)* $f(x) = 5$ *d)* $f(x) = -x^3 + 2x$

*e)* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *f)* $f(x) = 3x + 1$

5. Calcule.

*a)* $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ *b)* $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 + x^2}{3x^3 + x^4 + x}$

*c)* $\lim_{h \to 0} (x^2 + 3xh)$ *d)* $\lim_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

*e)* $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 9}$ *f)* $\lim_{x \to p} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{p}}{x - p}$ $(p \neq 0)$

*g)* $\lim_{x \to p} \dfrac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{p}}{x - p}$ $(p \neq 0)$ *h)* $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^4 - 5x - 6}$

*i)* $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^4 + 3x - 4}$ *j)* $\lim_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x + 7} - \sqrt{14}}$

*l)* $\lim_{x \to p} \dfrac{x^3 - p^3}{x - p}$ *m)* $\lim_{x \to p} \dfrac{x^4 - p^4}{x - p}$

*n)* $\lim_{x \to p} \dfrac{x^n - p^n}{x - p}$ $(n > 0 \text{ natural})$ *o)* $\lim_{x \to p} \dfrac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{p}}{x - p}$

*p)* $\lim_{x \to 2} \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2}$ *q)* $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$ onde $f(x) = \dfrac{1}{x}$

*r)* $\lim_{x \to p} \dfrac{g(x) - g(p)}{x - p}$ onde $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *s)* $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ onde $f(x) = x^2 - 3x$

6. Prove que existe $\delta > 0$ tal que

$$1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow 2 - \frac{1}{3} < x^2 + x < 2 + \frac{1}{3}.$$

7. Prove que existe $\delta > 0$ tal que

$$1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow 2 - \frac{1}{2} < \frac{x^5 + 3x}{x^2 + 1} < 2 + \frac{1}{2}$$

8. Sejam $f$ e $g$ definidas em $\mathbb{R}$ com $g(x) \neq 0$ para todo $x$. Suponha que $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x)| < |g(x)|.$$

*Demonstração.* Deixamos para o leitor. ■

**Observações**

1. Se $\lim\limits_{x \to p^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to p^-} f(x)$ existirem e forem *diferentes*, então $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ não existirá.

2. Se existirem $a$ e $b$ tais que $]a, p[$ e $]p, b[$ estejam contidos em $D_f$ e se, em $p$, um dos limites laterais não existir, então $\lim\limits_{x \to p} f(x)$ não existirá.

3. Se existirem reais $r > 0$ e $b$ tais que $]p, b[ \subset D_f$ e $]p - r, p[ \cap D_f = \phi$, então $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \lim\limits_{x \to p^+} f(x)$, desde que o limite lateral à direita exista. Se ocorrer $]b, p[ \subset D_f$ e $]p, p + r[ \cap D_f = \phi$, então $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \lim\limits_{x \to p^-} f(x)$, desde que o limite lateral à esquerda exista.

**EXEMPLO 3.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ existe? Por quê?

*Solução*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} -1 = -1.$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} \neq \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$, segue que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ não existe. ■

*Exercícios 3.4*

1. Calcule, caso exista. Se não existir, justifique.

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$ onde $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$ onde $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$

g) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x-1}$

h) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$ onde $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

j) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{g(x) - g(2)}{x-2}$ onde $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 2 \\ \dfrac{x^2}{2} & \text{se } x < 2 \end{cases}$

l) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{g(x) - g(2)}{x-2}$ sendo $g$ a função do item (*j*)



m) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{g(x) - g(2)}{x-2}$ onde $g$ é a função do item (*j*)

2. A afirmação

"$\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = \lim\limits_{x \to p^-} f(x) \Rightarrow f$ contínua em $p$"

é falsa ou verdadeira? Justifique.

3. Dada a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$, verifique que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$. Pergunta-se: $f$ é contínua em 1? Por quê?

4. Dê exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$, que não seja contínua em 2, mas que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$.

5. Suponha que exista $r > 0$ tal que $f(x) \geq 0$ para $p < x < p + r$. Prove que $\lim\limits_{x \to p^+} f(x) \geq 0$ desde que o limite exista.

6. Sejam $f$ uma função definida num intervalo aberto $I$ e $p \in I$. Suponha que $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in I$. Prove que $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} = 0$ desde que o limite exista.

(*Sugestão*: estude os sinais de $\lim\limits_{x \to p^+} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$ e de $\lim\limits_{x \to p^-} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$

## 3.5. Limite de Função Composta

Sejam $f$ e $g$ duas funções tais que $\operatorname{Im} f \subset D_g$ onde $\operatorname{Im} f$ é a *imagem de* $f$, ou seja, $\operatorname{Im} f = \{ f(x) \mid x \in D_f \}$. Nosso objetivo é estudar o limite

$$\lim_{x \to p} g(f(x)).$$

Supondo que $\lim\limits_{x \to p} f(x) = a$ é razoável esperar que

① $$\lim_{x \to p} g\,(\overbrace{f(x)}^{u}) = \lim_{u \to a} g(u)$$

desde que $\lim\limits_{u \to a} g(u)$ exista (*observe*: $u = f(x)$; $u \to a$ para $x \to p$). Veremos que ① se verifica se $g$ for contínua em $a$ ou se $g$ não estiver definida em $a$. Veremos, ainda, que se $g$ estiver definida em $a$, mas não for contínua em $a$ ($\lim\limits_{u \to a} g(u) \neq g(a)$) ① se verificará desde que ocorra $f(x) \neq a$ para $x$ próximo de $p$. Os casos que interessarão ao curso são aqueles em que $g$ ou é contínua em $a$ ou não está definida em $a$. O quadro que apresentamos a seguir mostra como iremos trabalhar com o limite de função composta no cálculo de limites.

1. Calcule.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x - \pi}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen} x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2}{\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{sen} 4x}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$

i) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{2x - \pi}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

l) $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{\operatorname{tg}(x - p)}{x^2 - p^2}$, $p \neq 0$

m) $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 - p^2)}{x - p}$

n) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) - \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x}$

o) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x^2 - \operatorname{sen} x}$

p) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{tg} x}{x + \operatorname{tg} x}$

q) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen} \pi x}{x - 1}$

2. a) Prove que existe $r > 0$ tal que

$$\cos x - 1 < \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 < 0$$

para $0 < |x| < r$.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^2}$