Exercícios 2.1

1. Calcule.

a) $f(-1)$ e $f\left(\frac{1}{2}\right)$ sendo $f(x) = -x^2 + 2x$

b) $g(0)$, $g(2)$ e $g(\sqrt{2})$ sendo $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

c) $\dfrac{f(a+b) - f(a-b)}{ab}$ sendo $f(x) = x^2$ e $ab \neq 0$

d) $\dfrac{f(a+b) - f(a-b)}{ab}$ sendo $f(x) = 3x + 1$ e $ab \neq 0$

2. Simplifique $\dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$ $(x \neq p)$ sendo dados:

a) $f(x) = x^2$ e $p = 1$ *b)* $f(x) = x^2$ e $p = -1$

c) $f(x) = x^2$ e p qualquer *d)* $f(x) = 2x + 1$ e $p = 2$

e) $f(x) = 2x + 1$ e $p = -1$ *f)* $f(x) = 5$ e $p = 2$

g) $f(x) = x^3$ e $p = 2$ *h)* $f(x) = x^3$ e $p = -2$

i) $f(x) = x^3$ e p qualquer *j)* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $p = 1$

l) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $p = 2$ *m)* $f(x) = x^2 - 3x$ e $p = -2$

n) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e $p = 3$ *o)* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e $p = -3$

p) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $p \neq 0$ *q)* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e $p \neq 0$

3. Simplifique $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $(h \neq 0)$ sendo $f(x)$ igual a

a) $2x + 1$ *b)* $3x - 8$ *c)* $2x + 4$

d) x^2 *e)* $x^2 + 3x$ *f)* $x^2 + 5$

g) $x^2 - 2x$ *h)* $x^2 - 2x + 3$ *i)* $-2x^2 + 3$

j) $2x^2 + x + 1$ *l)* x^3 *m)* $x^3 + 2x$

n) $x^3 + x^2 - x$ *o)* 5 *p)* $\dfrac{1}{x}$

q) $2x^3 - x$ *r)* $\dfrac{1}{x^2}$ *s)* $\dfrac{1}{x+2}$

4. Dê o domínio e esboce o gráfico.

a) $f(x) = 3x$ *b)* $g(x) = -x$

c) $h(x) = -x + 1$ *d)* $f(x) = 2x + 1$

e) $g(x) = -2x + 3$ *f)* $g(x) = 3$

g) $f(x) = -2$ *h)* $h(x) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$

i) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x$ *j)* $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leqslant 2 \\ 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

l) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leqslant -1 \\ -x + 1 & \text{se } x > -1 \end{cases}$ *m)* $h(x) = |x - 1|$

n) $f(x) = |x + 2|$ *o)* $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

p) $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ *q)* $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$

r) $g(x) = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$ *s)* $f(x) = \dfrac{|2x + 1|}{2x + 1}$

5. Considere a função $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$.

a) Mostre que $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2 \\ 2x - 3 & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$

b) Esboce o gráfico de f

6. Esboce o gráfico.

a) $f(x) = |x| + |x - 2|$ *b)* $g(x) = |x| - 1$

c) $y = ||x| - 1|$ *d)* $f(x) = |x + 1| - |x|$

7. Olhando para o gráfico de f, estude o sinal de $f(x)$.

a) $f(x) = x - 3$ *b)* $f(x) = -2x + 1$

c) $f(x) = 3x + 1$ *d)* $f(x) = -3x - 2$

e) $f(x) = x + 3$ *f)* $f(x) = -8x + 1$

g) $f(x) = ax + b$ $(a > 0)$ *h)* $f(x) = ax + b$ $(a < 0)$

8. Estude a variação do sinal de $f(x)$.

a) $f(x) = (x - 1)(x + 2)$ *b)* $f(x) = (2x + 3)(x + 1)$

c) $f(x) = x(1 - x)$ *d)* $f(x) = (-x + 2)(x - 3)$

e) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ *f)* $f(x) = \dfrac{2x - 3}{1 - 2x}$

g) $f(x) = \dfrac{x}{2x + 3}$ *h)* $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$

i) $f(x) = \dfrac{x(2x - 1)}{x + 1}$ *j)* $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 + 1}$

l) $f(x) = (2x - 3)(x + 1)(x - 2)$ *m)* $f(x) = \dfrac{2x - 3}{(1 - x)(1 - 2x)}$

9. Determine o domínio.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ *b)* $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

c) $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ *d)* $y = \dfrac{x}{x + 2}$

e) $h(x) = \sqrt{x + 2}$ *f)* $g(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + x}$

g) $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$ *h)* $y = \sqrt[4]{\dfrac{x}{x + 3}}$

i) $y = \sqrt[3]{x^2 - x}$ *j)* $y = \sqrt{x(2 - 3x)}$

l) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x - 1}{1 - 3x}}$ *m)* $y = \sqrt[6]{\dfrac{x - 3}{x + 2}}$

n) $s = \sqrt{t^2 - 1}$ *o)* $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x - 1}}$

Sendo f uma função, definimos a *imagem de f* por $\text{Im}f = \{ f(x) \mid x \in D_f \}$.

Definição (*de função composta*). Sejam f e g duas funções tais que $\text{Im}f \subset D_g$. A função dada por

$$y = g(f(x)),\ x \in D_f,$$

denomina-se *função composta* de g e f. É usual a notação $g \circ f$ para indicar a composta de g e f.

Assim,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ x \in D_f.$$

Observe que $g \circ f$ tem o mesmo domínio que f.

EXEMPLO 2. Sejam f e g dadas por $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 3x$. Determine $g \circ f$ e $f \circ g$.

Solução

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + 3[f(x)] = (2x + 1)^2 + 3(2x + 1),\ x \in \mathbb{R} = D_f.$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 3x) = 2(x^2 + 3x) + 1,\ x \in D_g = \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 3. Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Determine $g \circ f$ e $f \circ g$.

Solução

$\text{Im}f = \mathbb{R}_+$ e $D_g = \mathbb{R}_+$, assim $\text{Im}f \subset D_g$. (Notação: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|,\ x \in \mathbb{R} = D_f.$$

$\text{Im}g = \mathbb{R}_+$ e $D_f = \mathbb{R}$, logo $\text{Im}g \subset D_f$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x,\ x \in \mathbb{R}_+ = D_g. \quad \blacksquare$$

Definição (*de igualdade de funções*). Sejam as funções $f: A \to \mathbb{R}$ e $g: A' \to \mathbb{R}$. Dizemos que f *é igual* a g, e escrevemos $f = g$, se os domínios de f e g forem iguais, $A = A'$, e se, para todo $x \in A$, $f(x) = g(x)$.

EXEMPLO 4. Sejam $f: A \to \mathbb{R}$ e $g: A \to \mathbb{R}$ duas funções. Prove que $f + g = g + f$.

Solução

$$D_{f+g} = A = D_{g+f}.$$

Por outro lado, para todo x em A,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x).$$

Assim,

$$f + g = g + f.$$

Observe que $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$, pois $f(x)$ e $g(x)$ são números reais e, em $\mathbb{R}$, vale a propriedade comutativa. $\blacksquare$

EXEMPLO 5. As funções f e g dadas por $f(x) = \sqrt{x}\,\sqrt{x - 1}$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$ são iguais?

Solução

$$f \neq g \text{ pois } D_f \neq D_g\ (D_f = [1, +\infty[\text{ e } D_g =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[). \quad \blacksquare$$

Exercícios 2.4

1. Dê os domínios e esboce os gráficos de $f + g$ e $\dfrac{g}{f}$.

a) $f(x) = x$ e $g(x) = x^2 - 1$ b) $f(x) = x$ e $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = 1$ e $g(x) = \sqrt{x - 1}$ d) $f(x) = 1$ e $g(x) = \dfrac{1}{(x - 2)^2}$

e) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 \text{ se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} -1 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

2. Verifique que $\text{Im}f \subset D_g$ e determine a composta $h(x) = g(f(x))$.

a) $g(x) = 3x + 1$ e $f(x) = x + 2$
b) $g(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = 2 + x^2$
c) $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ e $f(x) = x^2 + 3$
d) $g(x) = x^2 + 3x + 1$ e $f(x) = 2x - 3$
e) $g(x) = \dfrac{2}{x - 2}$ e $f(x) = x + 1,\ x \neq 1$
f) $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ e $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$
g) $g(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = x^2 - x,\ x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$
h) $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ e $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

3. Determine o "maior" conjunto A tal que $\text{Im}f \subset D_g$; em seguida, construa a composta $h(x) = g(f(x))$.

a) $g(x) = \dfrac{2}{x + 2}$ e $f: A \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 3$
b) $g(x) = \sqrt{x - 1}$ e $f: A \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
c) $g(x) = \sqrt{x - 1}$ e $f: A \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$
d) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ e $f: A \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - x^2$
e) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ e $f: A \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2$

4. Determine f de modo que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in D_f$, sendo g dada por

a) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ b) $g(x) = \dfrac{x + 2}{x + 1}$

c) $g(x) = x^2,\ x \geqslant 0$ d) $g(x) = x^2 - 2x,\ x \geqslant 1$

e) $g(x) = 2 + \dfrac{3}{x + 1}$ f) $g(x) = x^2 - 4x + 3,\ x \geqslant 2$

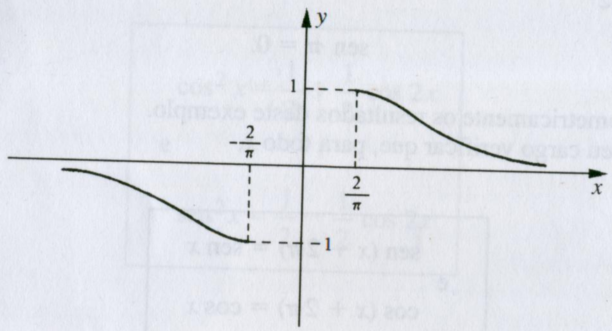
EXEMPLO 6. Esboce o gráfico da função dada por $y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

Solução

Primeiro vamos estudar o comportamento de y para $x \geqslant \dfrac{2}{\pi}$.

$$x \geqslant \frac{2}{\pi} \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Assim, para $x \geqslant \dfrac{2}{\pi}$, $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x} > 0$. À medida que x aumenta, $\dfrac{1}{x}$ vai se aproximando de zero, o mesmo acontecendo com $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$. Para $x \leqslant -\dfrac{2}{\pi}$ é só observar que $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ é ímpar.



Observe que para $x = \dfrac{2}{\pi}$, $y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{\frac{2}{\pi}} = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} = 1$.

Vejamos, agora, o comportamento de $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ para $0 < x < \dfrac{2}{\pi}$.

$$\operatorname{sen} \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{4k\pi + \pi} \quad (k \text{ inteiro})$$

x	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{2}{9\pi}$	$\frac{2}{13\pi}$	$\to 0$
y	1	1	1	1	

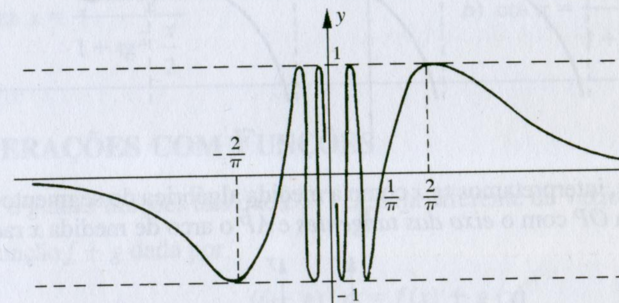
$$\operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{k\pi}$$

x	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{3\pi}$	$\frac{1}{4\pi}$	$\to 0$
y	0	0	0	0	

$$\operatorname{sen} \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{4k\pi + 3\pi}$$

x	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{2}{7\pi}$	$\frac{2}{11\pi}$	$\frac{2}{15\pi}$	$\to 0$
y	-1	-1	-1	-1	

Quando x varia em $]0, \dfrac{2}{\pi}]$, $\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ fica oscilando entre 1 e -1.



■

Exercícios 2.2

1. Esboce o gráfico.

a) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$
b) $y = 2 \cos x$
c) $y = \cos \dfrac{x}{2}$
d) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$
e) $y = \operatorname{sen} \pi x$
f) $f(x) = x \operatorname{sen} x$
g) $g(x) = \dfrac{1}{x} \operatorname{sen} x$
h) $y = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$
i) $y = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$
j) $g(x) = x + \operatorname{sen} x$

2. Sejam a e b reais quaisquer. Verifique que

a) $\operatorname{sen} a \cos b = \dfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(a - b)]$

b) $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$

c) $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \dfrac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$