Universidade Federal de Rondônia **Departamento de Física**

Física Matemática I **Name:** ____________________

2016/2

05/09/2016

Data Limite: 05/09/2016 Professor: Ariel Adorno

---

1. Sendo os vetores $\vec{A} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 3\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 8\hat{k}$, $\vec{C} = -2\hat{\imath} - 8\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ e $\vec{D} = 9\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 6\hat{k}$, calcule o seguinte.
   (a) Os modulos dos vetores;
   (b) Todas as possíveis somas em que são utilizados dois dos vetores, e os respectivos módulos.
   (c) Todas as possíveis somas e que ao utilizados três dos vetores. e os respectivos modulos;
   (d) A soma dos quatro vetores, e o modulo;
   (e) As possíveis subtrações mediante o uso de três dos vetores, e os módulos;
   (f) As possíveis subtrações envolvendo os quatro vetores, e os módulos.

2. Utilizando os vetores dados no problema 1, reponda ao seguinte.
   (a) Ache, para cada par de vetores, um vetor que seja ortogonal a ambos e que tenha módulo unitário;
   (b) Considerando as possíveis somas dois-a-dois dos vetores, encontre um vetor ortogonal unitário para cada par de vetor-soma;
   (c) Encontre os produtos escalares e vetorias dos versores obtidos acima.

3. Considerando a função escalar $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, responda as perguntas abaixo.
   (a) Que figura geométrica é obtida quando Φ é constante?
   (b) Qual é o gradiente de Φ
   (c) Ache um versor normal à superfície $\Phi = k$, sendo k uma constante;
   (d) Calcule o laplaciano de Φ

4. Prove que o produto misto de três vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ é numericamente igual ao volume do paralelepípedo definido pelos três vetores.

5. Mostre que o operador gradiente em coordenadas cilíndricas pode ser escrito como: $\nabla = \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\theta}}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$ e aplicado a uma função escalar: $\nabla\Phi = \hat{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\hat{\theta}}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \hat{k}\frac{\partial \Phi}{\partial z}$

6. Calcule o gradiente e o Laplaciano das funções abaixo.
   (a) $f(x, y, z) = 2xy + 3\sqrt{y}z^2$
   (b) $f(x, y, z) = y^3 sen(xz) + ln(2y^3 z)$

(c) $f(\rho,\theta,z) = \dfrac{\rho cos\theta}{z}$

(d) $f(\rho,\theta,z) = \dfrac{\theta z}{\rho^2}$

(e) $f(\rho,\theta,\phi) = rsen(2\theta)cos(\phi) + r^2 sen(2\theta)tg(\phi)$

(f) $f(\rho,\theta,\phi) = r^3 ln\left[\theta cos(\phi)\right]$

7. Calcule o divergente e o rotacional das funções abaixo.

(a) $\vec{f}(x,y,z) = 4xyz\hat{i} - \dfrac{3z^2}{y}\hat{j} + cosx\hat{k}$

(b) $\vec{f}(x,y,z) = y^5 ln(xz)\hat{i} + tgh(2y^3 z)\hat{j} + e^{x^2yz}\hat{k}$

(c) $\vec{f}(\rho,\theta,z) = \dfrac{\rho}{z}\hat{\rho} + sen\theta\hat{\theta} - \rho z\hat{k}$

(d) $\vec{f}(\rho,\theta,z) = \rho^2\theta z\hat{\rho} + \dfrac{z}{tg\theta}\hat{\theta} + 2\rho z cosh(2\theta)\hat{k}$

(e) $\vec{f}(r,\theta,\phi) = rsen2\theta\hat{r} + rsen^2 2\theta tg\phi\hat{\theta} - \dfrac{\phi}{rcos\theta}\hat{\phi}$

(f) $\vec{f}(r,\theta,\phi) = \dfrac{r^3}{ln(\theta cos\phi)}\hat{r} + 2arccos\phi\hat{\theta}$

8. Reduza à forma $a + bi$ cada uma das expressões abaixo.

(a) $(3 + 5i) + (-2 + i)$

(b) $(-3 + 4i) - (1 - 2i)$

(c) $(\sqrt{3} - 2i) - \left[2 - i(\sqrt{3} + 4)\right]$

(d) $(3 - 5i)(-2 - 4i)$

(e) $(1 + \dfrac{i}{3})(-\dfrac{6}{5} + 3i)$

(f) $(3i - 1)(\dfrac{1}{3} + \dfrac{i}{2})$

(g) $(1 + i)^3$

(h) $1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^4 + 6i^5$

9. Mostre que $\sum_{n=0}^{N} i^n = 1, 1 + 1, iou, 0$, conforme o resto da divisão de N por 4 seja zero, 1, 2 ou 3, respectivamente.

10. Mostre que $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

11. Mostre que $(x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$

12. Mostre que $(x + iy)^2(x - iy)^2 = (x^2 + y^2)^2$

13. Mostre que $(x + iy)^n(x - iy)^n = (x^2 + y^2)^n$

14. Represente graficamente os números complexos: z_1, z_2, $z_1 z_2$ e z_1/z_2
    (a) $z_1 = 3 + 4i \; ; \; z_2 = \dfrac{1-i}{5\sqrt{2}}$
    (b) $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \; ; \; z_2 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$
    (c) $z_1 = \dfrac{1+i}{2\sqrt{2}} ; z_2 = 1 + i\sqrt{3}$
    (d) $z_1 = 1 + 2i \; ; \; z_2 = 2 - i$
    (e) $z_1 = 3 - i \; ; \; z_2 = 3 - i/2$
15. Mostre que $Re\left[-i(2-3i)^2\right] = -12$
16. Mostre que $\dfrac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i} = -i$
17. Use as equações de Cauchy-Riemann para verificar, no caso de cada uma das funções dados, qual é analítica e em que domínio. Em caso positivo, calcule a derivada $f'(z)$.
    (a) $w = z^3$
    (b) $w = e^{z^*}$
    (c) $w = z^*$
    (d) $w = 1/z$
    (e) $w = (e^y + e^{-y} sen(x)) + (e^y - e^{-y}) \, cos(x)$
    (f) $w = \sqrt{z}$
18. Calcule as integrais abaixo usando o teorema de Cauchy-Riemann.
    (a) $g(z) = z^2$, $\gamma = [2,4]; [0,2]$
    (b) $g(z) = e^z$, $\gamma = [0, 2\pi]$
    (c) $g(z) = e^z$, $\gamma = [0, 1]$
    (d) $g(z) = e^{i(kx - \omega\tau)}$, $\gamma = [-4\pi, 4\pi]$
    (e) $g(z) = sec(z) tg(z)$
    (f) $f(z) = \dfrac{z^3 + 2z + 7}{z}$
19. Mostre que o Teorema de Green é válida também no espaço dos números complexos.