1.4 PROBLEMAS

Encontre soluções gerais (implícitas, se necessário; explícitas, se conveniente) das equações diferenciais nos Problemas 1-8. (Note: y denota a derivada de y em relação a x)

1. $y' + 2xy = 0$

2. $y' = 2xy^2 = 0$

3. $y' = y \operatorname{sen} x$

4. $(1 + x)y' = 4y$

5. $2\sqrt{x}\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$

6. $\dfrac{dy}{dx} = 3\sqrt{xy}$

7. $\dfrac{dy}{dx} = (64xy)^{1/3}$

8. $\dfrac{dy}{dx} = 2x \sec y$

9. $(1 - x^2)\dfrac{dy}{dx} = 2y$

10. $(1 + x)^2\dfrac{dy}{dx} = (1 + y)^2$

11. $\dfrac{dy}{dx} = xy^3$

12. $y\dfrac{dy}{dx} = x(y^2 + 1)$

13. $y^3\dfrac{dy}{dx} = (y^4 + 1)\cos x$

14. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{y}}$

15. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x - 1)y^5}{x^2(2y^3 - y)}$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{y}}$

17. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$

18. $x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$

Encontre soluções particulares explícitas dos problemas de valor inicial nos Problemas 19-26.

19. $\dfrac{dy}{dx} = ye^x; \; y(0) = 2e$

20. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2(y^2 + 1); \; y(0) = 1$

21. $2y\dfrac{dy}{dx} = x(x^2 - 16)^{-1/2}; \; y(5) = 2$

22. $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3y - y; \; y(1) = -3$

23. $\dfrac{dy}{dx} + 1 = 2y; \; y(1) = 1$

24. $y' \tan x = y; \; y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

25. $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x^2y; \; y(1) = 1$

26. $\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2 + 3x^2y^2; \; y(1) = -1$

27. (Crescimento populacional) Uma certa cidade tinha uma população de 25.000 em 1960 e uma população de 30.000 em 1970. Assuma que sua população continuará a crescer exponencialmente a uma taxa constante. Que população podem seus planejadores urbanos esperar para o ano 2000?

28. (Crescimento populacional) Numa certa cultura de bactérias o número de bactérias cresceu seis vezes em 10 horas. Quanto tempo levou para a população duplicar seu número inicial?

29. (Datação por carbono radiativo) Carbono extraído de um crânio antigo continha apenas um sexto do ^{14}C radiativo do que o carbono extraído de um osso atual. Qual a idade do crânio?

30. (Datação por carbono radiativo) Carbono retirado de uma suposta relíquia do tempo de Cristo continha $4{,}6 \times 10^{10}$ átomos de ^{14}C por grama. Carbono extraído de uma amostra atual da mesma substância continha $5{,}0 \times 10^{10}$ átomos de ^{14}C por grama. Calcule a idade aproximada da relíquia. Qual é a sua opinião a respeito da autenticidade da relíquia?

31. (Juro continuamente composto) Na ocasião do nascimento de um primeiro bebê um casal depositou $5.000 numa caderneta de poupança que rende 8% (ao ano) de juros continuamente compostos. Permite-se acumular os pagamentos de juros. Quanto terá a caderneta no décimo oitavo aniversário da criança?

32. (Juro continuamente composto) Suponha que você descobre no porão um livro de biblioteca com o prazo de devolução vencido pelo qual o seu tataravô devia uma multa de 30 centavos há cem anos. Se uma multa vencida cresce exponencialmente a um juro continuamente composto de 5% ao ano, quanto você teria que pagar se devolvesse o livro hoje?

33. (Eliminação de droga) Suponha que o sódio pentobarbital é usado para anestesiar um cachorro. O cachorro está anestesiado quando a concentração de sua corrente sanguínea contém pelo menos 45 miligramas (mg) de sódio pentobarbitol por quilo de peso do cachorro. Suponha também que o sódio pentobarbitol é eliminado exponencialmente da corrente sanguínea do cachorro com uma meia-vida de cinco horas. Que dose única deveria ser administrada de modo a anestesiar um cachorro de 50 quilos por uma hora?

34. A meia-vida do cobalto radiativo é 5,27 anos. Suponha que um acidente nuclear tenha levado o nível de radiação por cobalto numa certa região a 100 vezes o nível aceito para a habitação humana. Quanto tempo deverá passar até que a região seja novamente habitável? (Ignore a presença provável de outros elementos radiativos.)

35. Suponha que um corpo mineral formado num cataclisma antigo — talvez a formação da própria terra — continha originalmente o isótopo do urânio ^{238}U (que tem uma meia-vida de $4{,}51 \times 10^9$ anos) mas nenhum chumbo, que é o produto final do decaimento radiativo do ^{238}U. Se hoje a razão de átomos de ^{238}U para átomos de chumbo no corpo mineral é 0,9, quando terá ocorrido o cataclisma?

36. Em uma certa rocha lunar constatou-se conter igual número de átomos de potássio e de argônio. Assuma que todo o argônio é o resultado do decaimento radiativo do potássio (sua meia-vida é algo como $1{,}28 \times 10^9$ anos) e que uma em cada nove desintegrações de átomo de potássio fornece um átomo de argônio. Qual a idade da rocha, medida desde o tempo em que ela continha apenas potássio?

37. Um jarro de leite inicialmente a 25°C é deixado para resfriar na varanda onde a temperatura é 0°C. Suponha que a temperatura do leite tenha caído para 15°C após 20 min. Quando ela será de 5°C?

38. Quando açúcar é dissolvido em água, a quantidade A que permanece não-dissolvida após t minutos satisfaz a equação diferencial $dA/dt = -kA$ $(k > 0)$. Se 25% do açúcar são dissolvidos após 1 min, quanto se passa até que metade do açúcar se dissolva?

39. A intensidade I de luz a uma profundidade de x metros abaixo da superfície de um lago satisfaz a equação diferencial $dI/dx = (-1{,}4)\,I$. (a) A que profundidade a intensidade é metade da intensidade I_0 na superfície (onde $x = 0$)? (b) Qual a intensidade a uma profundidade de 10 m (como fração de I_0)? (c) A que profundidade será a intensidade 1/100 daquela na superfície?

40. A pressão barométrica p (em polegadas de mercúrio) a uma altitude de x milhas acima do nível do mar satisfaz o problema de valor inicial $dp/dx = -(0{,}2)p$, $p(0) = 29{,}92$. (a) Calcule a pressão barométrica a 10.000 pés e também a 30.000 pés. (b) Sem condicionamento prévio, poucas pessoas podem sobreviver quando a pressão cai a menos de 15 polegadas de mercúrio. Que altitude é esta?

41. Considere uma caderneta de poupança que contém inicialmente A_0 dólares e rende juros à taxa continuamente composta de r ao ano. Suponha que depósitos são feitos nesta caderneta à taxa de Q dólares por ano. Para simplificar o modelo matemático, assuma que esses depósitos são feitos continuamente e não (por exemplo) mensalmente. (a) Deduza a equação diferencial para a quantia $A(t)$ na caderneta ao tempo de t anos. (b) Suponha que você deseje providenciar, na ocasião do nascimento de sua filha, para que ela tenha 40.000 dólares disponíveis para despesas universitárias no dia de seu décimo oitavo aniversário. Você planeja conseguir isso fazendo freqüentes depósitos pequenos — essencialmente contínuos — numa caderneta de poupança, à taxa de Q milhares de dólares por ano. Esta caderneta acumula juros à taxa anual de 11%, continuamente compostos. Quanto deve ser Q para que você consiga seu objetivo?

42. De acordo com uma teoria cosmológica, havia iguais quantidades dos dois isótopos de urânio ^{235}U e ^{238}U na criação do universo, no *big bang*. Atualmente há 137,7 átomos de ^{238}U para cada átomo de ^{235}U. Usando as meias-vidas de $4{,}51 \times 10^9$ anos para o ^{238}U e $7{,}1 \times 10^8$ anos para o ^{235}U, calcule a idade do universo.

43. Um bolo é retirado de um forno a 210°F e deixado para esfriar à temperatura ambiente, de 70°F. Após 30 min, a temperatura do bolo é de 140°F. Quando será de 100°F?

44. (a) Pagamentos são feitos numa hipoteca (empréstimo original) de P_0 dólares continuamente à taxa constante de c dólares por mês. Seja $P(t)$ o principal (quantia ainda devida) após t meses, e r a taxa de juro mensal paga pelo devedor (por exemplo, se a taxa de juro anual é 12% então $r = 0{,}12/12 = 0{,}01$). Deduza a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = rP - c, \quad P(0) = P_0.$$

(b) O empréstimo para a compra de um automóvel de $ 10.800 deve ser pago continuamente por um período de 60 meses. Determine o pagamento mensal exigido se a taxa de juro anual é: (i) 12%; (ii) 18%.

45. Uma certa informação duvidosa sobre a feniltiouréia na água potável começou a espalhar-se um dia numa cidade com uma população de

1.5 PROBLEMAS

Ache soluções gerais para as equações diferenciais dos Problemas 1-25. Se for dada uma condição inicial, encontre a solução particular correspondente. Nestes problemas, y' denota derivada em relação a x.

1. $y' + y = 2; \quad y(0) = 0$
2. $y' - 2y = 3e^{2x}; \quad y(0) = 0$
3. $y' + 3y = 2xe^{-3x}$
4. $y' - 2xy = e^{x^2}$
5. $xy' + 2y = 3x; \quad y(1) = 5$
6. $xy' + 5y = 7x^2; \quad y(2) = 5$
7. $2xy' + y = 10\sqrt{x}$
8. $3xy' + y = 12x$
9. $xy' - y = x; \quad y(1) = 7$
10. $2xy' - 3y = 9x^3$
11. $xy' + y = 3xy; \quad y(1) = 0$
12. $xy' + 3y = 2x^5; \quad y(2) = 1$
13. $y' + y = e^x; \quad y(0) = 1$
14. $xy' - 3y = x^3; \quad y(1) = 10$
15. $y' + 2xy = x; \quad y(0) = -2$
16. $y' = (1 - y)\cos x; \quad y(\pi) = 2$
17. $(1 + x)y' + y = \cos x; \; y(0) = 1$
18. $xy' = 2y + x^3\cos x$
19. $y' + y\cot x = \cos x$
20. $y' = 1 + x + y + xy; \quad y(0) = 0$
21. $xy' = 3y + x^4\cos x; \quad y(2\pi) = 0$
22. $y' = 2xy + 3x^2\exp(x^2); \quad y(0) = 5$
23. $xy' + (2x - 3)y = 4x^4$
24. $(x^2 + 4)y' + 3xy = x; \quad y(0) = 1$
25. $(x^2 + 1)y' + 3x^3y = 6x\exp\left(-\frac{3x^2}{2}\right); \quad y(0) = 1$

Resolva as equações diferenciais nos Problemas 26-28 encarando y, e não x, como a variável independente.

26. $(1 - 4xy^2)y' = y^3$
27. $(x + ye^y)y' = 1$
28. $(1 + 2xy)y' = 1 + y^2$
29. Expresse a solução geral de $y' = 1 + 2xy$ em termos da **função de erro**

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

30. Expresse a solução do problema de valor inicial

$$2xy' = y + 2x\cos x, \quad y(1) = 0$$

como uma integral como no Exemplo 3.

31. (a) Mostre que $y_C(x) = Ce^{-\int P(x)dx}$ é uma solução geral de $y' + P(x)y = 0$. (b) Mostre que

$$y_P(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[\int (Q(x)e^{\int P(x)dx})dx\right]$$

é uma solução particular de $y' = P(x)y = Q(x)$. (c) Se $y_C(x)$ é qualquer solução geral de $y' + P(x)y = 0$ e $y_p(x)$ é qualquer solução particular de $y' + P(x)y = Q(x)$, então mostre que $y(x) = y_C(x) + y_p(x)$ é uma solução geral de $y' + P(x)y = Q(x)$.

32. (a) Encontre constantes A e B tais que $y_P(x) = A$ sen $x + B\cos x$ é uma solução de $y' + y = 2$ sen x. (b) Use o resultado da parte (a) e o método do Problema 31 para achar a solução geral de $y' + y = 2$ sen x. (c) Resolva o problema de valor inicial $y' + y = 2$ sen x, $y(0) = 1$.

33. Um tanque contém 1.000 litros (L) de uma solução que consiste de 100 kg de sal dissolvido em água. Água pura é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 5 L/s, e a mistura — sempre mexida para mantê-la uniforme — é bombeada para fora à mesma taxa. Quanto tempo levará para que só 10 kg de sal permaneçam no tanque?

34. Considere um reservatório com um volume de 8 bilhões de pés cúbicos (ft^3) e uma concentração inicial de poluente de 0,25%. Há um fluxo diário para dentro do tanque de 500 milhões ft^3 de água com uma concentração de poluente de 0,05% e um fluxo diário igual para fora do tanque, sempre mantido bem misturado. Quanto tempo levará para reduzir a concentração de poluente para 0,10%?

35. Refaça o Exemplo 5 para o caso do lago Ontário; as únicas diferenças são que este lago tem um volume de 1.636 km^3 e uma taxa de fluxo (para dentro e para fora) de 209 km^3/ano.

36. Um tanque contém inicialmente 60 gal de água pura. Água salgada contendo 1 lb de sal por galão entra no tanque a uma taxa de 2 gal/min, e a solução (perfeitamente homogênea) deixa o tanque a uma taxa de 3 gal/min; o tanque está vazio depois de 1 h. (a) Ache a quantidade de sal no tanque depois de t minutos. (b) Qual a quantidade máxima de sal alcançada no tanque?

37. Um tanque de 400 gal contém inicialmente 100 gal de água salgada com 50 lb de sal. Água salgada contendo 1 lb de sal por galão entra no tanque a uma taxa de 5 gal/s, e a água misturada no tanque flui para fora a uma taxa de 3 gal/s. Quanto sal conterá o tanque quando estiver cheio de água salgada?

38. Considere dois tanques em *cascata* mostrados na Fig. 1.30, com $V_1 = 100$ (gal) e $V_2 = 200$ (gal) os volumes de água salgada nos dois tanques. Cada tanque contém inicialmente 50 lb de sal. As três taxas de fluxo são todas iguais a 5 gal/s, com água pura fluindo para o tanque 1.