

1. Sendo os vetores $\vec{A} = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{i} + 2\hat{j} + 8\hat{k}$, $\vec{C} = -2\hat{i} - 8\hat{j} + 2\hat{k}$ e $\vec{D} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$, calcule o seguinte.
 - (a) Os módulos dos vetores;
 - (b) Todas as possíveis somas em que são utilizados dois dos vetores, e os respectivos módulos.
 - (c) Todas as possíveis somas e que ao utilizados três dos vetores. e os respectivos módulos;
 - (d) A soma dos quatro vetores, e o módulo;
 - (e) As possíveis subtrações mediante o uso de três dos vetores, e os módulos;
 - (f) As possíveis subtrações envolvendo os quatro vetores, e os módulos.
2. Utilizando os vetores dados no problema 1, reponda ao seguinte.
 - (a) Ache, para cada par de vetores, um vetor que seja ortogonal a ambos e que tenha módulo unitário;
 - (b) Considerando as possíveis somas dois-a-dois dos vetores, encontre um vetor ortogonal unitário para cada par de vetor-soma;
 - (c) Encontre os produtos escalares e vetorias dos versores obtidos acima.
3. Considerando a função escalar $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, responda as perguntas abaixo.
 - (a) Que figura geométrica é obtida quando Φ é constante?
 - (b) Qual é o gradiente de Φ
 - (c) Ache um versor normal à superfície $\Phi = k$, sendo k uma constante;
 - (d) Calcule o laplaciano de Φ
4. Prove que o produto misto de três vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} é numericamente igual ao volume do paralelepípedo definido pelos três vetores.
5. Mostre que o operador gradiente em coordenadas cilíndricas pode ser escrito como:

$$\nabla = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\theta}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$
 e aplicado a uma função escalar: $\nabla \Phi = \hat{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\hat{\theta}}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \hat{k} \frac{\partial \Phi}{\partial z}$
6. Calcule o gradiente e o Laplaciano das funções abaixo.
 - (a) $f(x, y, z) = 2xy + 3\sqrt{y}z^2$
 - (b) $f(x, y, z) = y^3 \text{sen}(xz) + \ln(2y^3z)$

- (c) $f(\rho, \theta, z) = \frac{\rho \cos \theta}{z}$
 (d) $f(\rho, \theta, z) = \frac{\theta z}{\rho^2}$
 (e) $f(\rho, \theta, \phi) = r \operatorname{sen}(2\theta) \cos(\phi) + r^2 \operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{tg}(\phi)$
 (f) $f(\rho, \theta, \phi) = r^3 \ln[\theta \cos(\phi)]$

7. Calcule o divergente e o rotacional das funções abaixo.

- (a) $\vec{f}(x, y, z) = 4xyz\hat{i} - \frac{3z^2}{y}\hat{j} + \cos x\hat{k}$
 (b) $\vec{f}(x, y, z) = y^5 \ln(xz)\hat{i} + \operatorname{tgh}(2y^3z)\hat{j} + e^{x^2yz}\hat{k}$
 (c) $\vec{f}(\rho, \theta, z) = \frac{\rho}{z}\hat{\rho} + \operatorname{sen}\theta\hat{\theta} - \rho z\hat{k}$
 (d) $\vec{f}(\rho, \theta, z) = \rho^2\theta z\hat{\rho} + \frac{z}{\operatorname{tg}\theta}\hat{\theta} + 2\rho z \operatorname{cosh}(2\theta)\hat{k}$
 (e) $\vec{f}(r, \theta, \phi) = r \operatorname{sen}2\theta\hat{r} + r \operatorname{sen}^2 2\theta \operatorname{tg}\phi\hat{\theta} - \frac{\phi}{r \cos\theta}\hat{\phi}$
 (f) $\vec{f}(r, \theta, \phi) = \frac{r^3}{\ln(\theta \cos\phi)}\hat{r} + 2 \operatorname{arccos}\phi\hat{\theta}$

8. Reduza à forma $a + bi$ cada uma das expressões abaixo.

- (a) $(3 + 5i) + (-2 + i)$
 (b) $(-3 + 4i) - (1 - 2i)$
 (c) $(\sqrt{3} - 2i) - [2 - i(\sqrt{3} + 4)]$
 (d) $(3 - 5i)(-2 - 4i)$
 (e) $(1 + \frac{i}{3})(-\frac{6}{5} + 3i)$
 (f) $(3i - 1)(\frac{1}{3} + \frac{i}{2})$
 (g) $(1 + i)^3$
 (h) $1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^4 + 6i^5$

9. Mostre que $\sum_{n=0}^N i^n = 1, 1 + i, i, 0$, conforme o resto da divisão de N por 4 seja zero, 1, 2 ou 3, respectivamente.

10. Mostre que $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

11. Mostre que $(x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$

12. Mostre que $(x + iy)^2(x - iy)^2 = (x^2 + y^2)^2$

13. Mostre que $(x + iy)^n(x - iy)^n = (x^2 + y^2)^n$

14. Represente graficamente os números complexos: z_1 , z_2 , $z_1 z_2$ e z_1/z_2

(a) $z_1 = 3 + 4i$; $z_2 = \frac{1 - i}{5\sqrt{2}}$

(b) $z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$

(c) $z_1 = \frac{1 + i}{2\sqrt{2}}$; $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

(d) $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = 2 - i$

(e) $z_1 = 3 - i$; $z_2 = 3 - i/2$

15. Mostre que $Re[-i(2 - 3i)^2] = -12$

16. Mostre que $\frac{1 - i\sqrt{2}}{\sqrt{2} + i} = -i$